didacticum
Zeitschrift für (Fach)Didaktik in Forschung und Unterricht
der Pädagogischen Hochschule Steiermark

CHRISTINA KONRAD

Multimodales Lernen mit didaktischen Arbeitsmitteln im mathematischen Erstunterricht: Eine qualitative Analyse

Abstract

This paper presents embodied cognition approaches as a theoretical explanatory approach to learning with manipulatives. Nine different types of manipulatives are introduced, compared, and analysed. The analysis mainly focuses on the possibilities offered by the manipulatives regarding non-counting enumeration and non-counting quantity display. With the help of a theoretically based coding guide, the manipulatives were coded and compared. The results show that different manipulatives have strengths and weaknesses in building a cardinal number concept and part-whole knowledge. Fingers and "Rechenschieber"-like manipulatives seemed to have advantages over other manipulatives in terms of handling, whereas coloured rods appeared to have greatest weaknesses regarding the selected criteria.

Key words

manipulatives, embodied cognition, non-counting enumeration, cardinality

Einleitung

Didaktische Arbeitsmittel sind ein alltägliches Werkzeug im mathematischen Anfangsunterricht und werden als Mittel zur Zahldarstellung bzw. zum Rechnen oder auch als Begründungs- und Argumentationshilfe eingesetzt (Krauthausen, 2018). Im Zuge der Auseinandersetzung mit didaktischen Arbeitsmitteln (engl. *manipulatives*) haben Kinder Zugriff auf multisensorische Informationen, auf deren Basis Verständnis und Wissen zu mathematischen Konzepten (hier insbesondere numerische und erste arithmetische Kompetenzen) aufgebaut werden (Bartolini & Martignone, 2020). Ob didaktische Arbeitsmittel im Unterricht unterstützend wirken, ist von ihrer Beschaffenheit, ihren Handlungsmöglichkeiten, der Dauer des Einsatzes, den didaktischen Instruktionen dazu und dem Vorwissen bzw. den Vorerfahrungen der Schüler*innen abhängig (Konrad, 2021).

Ein wichtiges Ziel im mathematischen Erstunterricht ist der Erwerb eines ordinalen und kardinalen Zahlverständnisses sowie zentraler Grundvorstellungen zu den Grundrechnungsarten (Dazugeben, Wegnehmen, ...). Dieses Wissen ist für den Aufbau flexibler arithmetischer Kompetenzen notwendig. Insbesondere das Verständnis einer Menge als Einheit (Kardinalzahlaspekt) und das darauf aufbauende Teile-Ganze-Verständnis von Mengen ist eine zentrale Voraussetzung für die Entwicklung nicht-zählender Rechenkompetenz (Björklund, Kullberg & Kempe, 2018; Cheng, 2012; Hunting, 2003). Didaktische Arbeitsmittel spielen als Mittel zur Zahldarstellung und zum Rechnen eine wichtige Rolle beim Aufbau dieser Kernkompetenzen (Schipper, 2009). Dabei wird aus fachdidaktischer Sicht insbesondere visuellen Informationen und damit verbundenen visuellen Repräsentationen eine entscheidende Funktion für das mentale Operieren zugeschrieben (Aebli, 2011; Lorenz, 1992; Soebbeke, 2005). Dies spiegelt sich in alternativen Bezeichnungen von Arbeitsmitteln wider (z. B. Anschauungsmittel, Veranschaulichungsmittel). Es werden zwar auch Handlungen mit Arbeitsmitteln als relevant angesehen (z. B. Schipper, 2009), jedoch wird immer wieder darauf verwiesen, dass nicht die Handlungen selbst, sondern die „geistigen Tätigkeiten", die diesen zugrunde liegen, zu nachhaltigem Lernen führen (Gaidoschik, 2012; Gerster & Schultz, 2000; Lorenz, 1992). Diese Sichtweise stimmt mit den Annahmen der traditionellen Kognitionspsychologie (*computational theory of mind*) überein. Hier wird davon ausgegangen, dass Handlungen abstrahiert und symbolisch kodiert werden müssen, um rein gedanklich, unabhängig von der konkreten Situation, verfügbar zu sein. Dem Geist wird dabei eine dem Körper überlegene, zentrale Rolle zugeschrieben (Lorenz, 2017; Pechter & Zwaan, 2005). Es wird angenommen, dass arithmetische Strukturen und Beziehungen zwischen den Zahlen im Zuge eines konstruktiven Aktes entstehen (Krauthausen, 2018; Lorenz, 1992; Lüken, 2012). Dabei ist jedoch immer noch nicht ganz geklärt, wie durch diesen konstruktiven Akt die Beziehungen und Strukturen verfügbar und wie aus konkreten Handlungen davon losgelöste Operationen werden. Zudem ist fraglich, warum dieser Prozess für manche Kinder einfach und für andere sehr schwer ist (Schulz, 2014).

Hier könnte ein sich aktuell immer mehr etablierendes, epistemologisches Paradigma in den Kognitionswissenschaften, die *embodied cognition*, sinnvolle Erklärungsansätze liefern. Die *embodied cognition* geht davon aus, dass Lernen kein rein geistiger, sondern ein stark körperbasierter Prozess ist (Shapiro, 2019). Varela, Thompson und Rosch (1993) sprechen von Kognition als *embodied action*. Kognition ist zum einen *embodied*, weil der Körper und dessen individuelle, sensomotorische Fähigkeiten darüber bestimmen, welche Informationen wir aufnehmen können, zum anderen wird mit dem Begriff *action* betont, dass Handlungen untrennbar mit Wahrnehmung verbunden und damit für Kognition konstituierend sind (Varela et al., 1993). Kognition findet dabei nicht nur im Gehirn statt, sondern schließt den Körper und auch die Umwelt als wesentliche Komponenten einer *extended cognition* ein (Shapiro, 2019). Didaktische

Arbeitsmittel nehmen aus dieser Perspektive eine zentrale Rolle im mathematischen Lernprozess ein. Ihre Gestaltung und Beschaffenheit und die damit verbundenen Möglichkeiten (*affordances*) zur multimodalen Mengenerfassung entscheiden darüber, was ein Kind damit lernen kann (Tang, Jeppsson, Danielsson & Bergh Nestlog, 2022).

Die vorliegende Arbeit hat zwei zentrale Ziele: 1) Es wird versucht darzulegen, inwiefern mathematisches Lernen ein körperbasierter Prozess ist, der durch Handlungen mit und an didaktischen Arbeitsmitteln maßgeblich mitbestimmt wird. 2) Im Hinblick auf fünf mathematisch-inhaltliche Kriterien, deren Bezug zur *embodied cognition* verdeutlich wird, werden Grenzen und Möglichkeiten gängiger physischer didaktischer Arbeitsmittel aufgezeigt. Damit sollte eine Orientierungshilfe für Wahl, Einsatz und Funktonsweise didaktischer Arbeitsmittel in der Praxis gegeben werden.

Embodied Cognition – Warum Kognition kein rein geistiger, symbolischer Prozess ist

Unter den Begriff *embodied cognition* fallen verschiedene theoretische Ansätze, die die standardkognitionstheoretische Sichtweise von Kognition mehr oder weniger hinterfragen und körperlichen Prozessen eine zentrale Rolle beim Lernen und Denken beimessen. Kognition wird dabei je nach Fokus als a) *embodied*, b) *enactive*, c) *embedded* oder d) *extended* gesehen (Shapiro, 2019; Trabant, 2016). Im Folgenden werden diese vier Sichtweisen, die je einen anderen Fokus auf körperbasierte Kognition haben und sich gegenseitig ergänzen, genauer beschrieben, um damit ein Gesamtbild von der Theorie der *embodied cogniton* zu vermitteln. Die theoretische Vereinbarkeit dieser Sichtweisen im Detail ist Gegenstand aktueller Forschung (z. B. Shapiro, 2019) und kann im Rahmen dieses Beitrags nicht diskutiert werden.

Die „embodied" Perspektive:

Besonders bedeutend für Kognition und Lernprozesse erscheint aus dieser Perspektive, über welche Art von Körper ein Organismus verfügt und welche Möglichkeiten dieser bietet (Shapiro, 2019). Gelernte Konzepte werden als körperbasiert angesehen, weil sie aus vielen Informationen aus unterschiedlichen Modalitäten (visuell, auditiv, motorisch, taktil-kinästhetisch, ...) bestehen, die eng assoziiert und zu einer Gesamtwahrnehmung, einem *embodied concept,* integriert werden. Setzt man sich zum Beispiel auf einen Sessel, sammelt das Gehirn über die Modalitäten übergreifend Informationen (Wie sieht der Sessel aus? Welche Geräusche können damit verbunden sein? Wie fühlt sich der Sessel an? Was mache ich damit? Wie fühle ich mich dabei?). Diese Wahrnehmungen werden später, wenn man über einen Sessel nachdenkt oder spricht, reaktiviert. Durch die innere Simulation der mit dem Konzept verbundenen Wahrnehmungen wird der Zugriff auf dessen Bedeutung möglich (Barsalou, 2008). Verkörperte Konzepte bestehen im

Grunde aus Aktivitäten in Bereichen des Gehirns, die für perzeptuelle, motorische und emotionale Informationen zuständig sind. Diese körperbasierte Verbindung zur realen Welt „erdet" Konzepte (*grounded cognition* vgl. Barsalou, 2008) und gibt ihnen Bedeutung (Pechter & Zwaan, 2005). Ausgehend von sogenannten Basiskonzepten (damit sind Konzepte gemeint, die durch physische Erfahrung begründet sind) kann durch Analogien oder in Form von Metaphern ein Verständnis von abstrakten Konzepten möglich werden (Lakoff & Johnson, 1999).

Studien zeigen, dass auch abstrakte, mathematische Konzepte auf konkreten, körperlichen Wahrnehmungen fußen. So gibt es eine Reihe von Belegen dafür, dass das Verständnis für Zahlen und Mengen mitunter auf fingersensorische bzw. fingermotorische Prozesse zurückzuführen ist und diese nützlich für den Erwerb numerischer Kompetenzen sind (Badets & Pesenti, 2010; Berteletti & Booth, 2016; Moeller, 2012; Rösch, Moeller, Ohl & Scheich, 2016). Zudem hat beispielsweise die Raumorientierung über numerische Kompetenzen Einfluss auf Rechenfertigkeit (Graß & Krammer, 2018), was darauf schließen lässt, dass die der Raumorientierung zugrundeliegenden konkreten, körperlichen Erfahrungen auch Ausgangspunkt für die Entwicklung einer guten Zahlraumorientierung sind. Lakoff und Nunez (2000) weisen insbesondere auf die Bedeutung von alltäglichen Erfahrungen (wie das Gruppieren, Wegnehmen, Hinzufügen von Objekten) für das Verständnis von Zahlen und Gesetzen basaler Arithmetik hin. Sie gehen zudem davon aus, dass unsere körperlichen Gegebenheiten und Möglichkeiten ausschlaggebend für mathematische Grundvorstellungen sind (z. B. dekadisches Zahlsystem, weil wir zehn Finger haben; lineare Zahlvorstellung aufgrund der Linearität von Bewegung). Motorische Fähigkeiten scheinen also direkt am Aufbau von nicht-symbolischen numerischen Kompetenzen und indirekt am Aufbau von symbolischen, numerischen Kompetenzen beteiligt zu sein (Gashaj, Oberer, Mast & Roebers, 2019).

Die „enactive" Perspektive:

Varela, Thompson und Rosch (1993) sehen Handlungen als zentrale Komponente für Wahrnehmung und damit für Kognition. Denken ist keineswegs nur passive mentale Repräsentation, sondern Ergebnis eines Prozesses des *enactments* (Trabant, 2016). Bedeutsame Kategorien und Konzepte entwickeln sich nicht willkürlich, sondern entstehen aus bestimmten sensomotorischen Aktivitäten und Interaktionen mit der Umwelt bzw. mit Objekten aus der Umwelt. Bedeutungstragende begriffliche Strukturen basieren auf strukturierter körperlicher und sozialer Erfahrung und können auf abstrakte begriffliche Strukturen projiziert werden (Fingerhut, Hufendiek & Wild, 2021). Varela et al. (1993) gehen davon aus, dass Handeln und Wahrnehmen in engem Zusammenhang stehen und dass aus wiederkehrenden sensomotorischen Mustern beim wahrnehmungsgeleiteten Handeln kognitive Strukturen entstehen, die neues wahrnehmungsgeleitetes Handeln möglich machen. Abrahamson, Nathan, Williams-Pierce, Walkington, Ottmar, Soto und Alibali (2020) betonen, dass motorische Abläufe und Handlungen nicht nur Endprodukte von mentalen Prozessen sind, sondern umgekehrt selbst

Ausgangspunkt/Auslöser für mentale Prozesse darstellen und unser Denken verändern können (*action-cognition transduction theory*). Die an konkreten Handlungen beteiligten willkürlichen Planungs- und Ausführungsprozesse ermöglichen eine reichere itemspezifische Enkodierung und damit auch bessere Abrufbarkeit und nachhaltigere Speicherung (Engelkamp, 1997). Nathan und Walkington (2017) empfehlen deshalb in Lernprozessen das bewusste Ausführen von mit dem Zielkonzept übereinstimmenden Handlungen (*directed actions*). Folglich scheint es sinnvoll, beim Lernen mit didaktischen Arbeitsmitteln wohl überlegte Handlungen als Kanal für motorisches, nonverbales Lernen zu nutzen.

Die „embedded" Perspektive:

Kognition ist jedoch nicht nur von motorischen und sensorischen Erfahrungen eines Körpers abhängig, sondern auch in einen biologischen, psychischen und sozialen Kontext eingebettet und von den Bedingungen der Umwelt beeinflusst. Wahrnehmung und Handlung bilden dabei einen dynamischen Kausalitätskreis ohne Anfang, Mitte und Ende. Der Körper eines Organismus spielt eine wichtige Rolle bei der Ausführung von Handlungen, die wiederum die Reaktion des Gehirns auf die Welt beeinflussen und gleichzeitig bestimmen, wie die Welt wahrgenommen werden kann. Zudem bietet die Struktur der Welt, je nach Beschaffenheit eines Körpers, Möglichkeiten und Einschränkungen und beeinflusst damit, welche Informationen bzw. Reize das Gehirn erhält. Das Gehirn ist damit nicht Hauptakteur in einem kognitiven Prozess, sondern nimmt eine der Umwelt und dem Körper gleichwertige Rolle ein (Shapiro, 2019). Hier schließt auch Gibsons Theorie der „*affordances*" an (Fingerhut et al., 2021). Aus dieser Perspektive sind in einen Lernprozess involvierte Objekte und Gegebenheiten zentral, da die damit verbundenen (Handlungs-)Möglichkeiten (*affordances*) bestimmen, was wahrgenommen werden kann. Tang et al. (2022) weisen darauf hin, dass z. B. konkrete, manipulierbare Materialien im Lernprozess durch ihre *affordances* wesentliche Einsichten (Bedeutungsstiftung, Beweisdeutung, sensorische und räumliche Informationen) ermöglichen, die nicht rein sprachlich oder gestisch vermittelt werden können. Simon (1994) führt als Beispiel eine Ameise an, deren Weg nach Hause nicht gerade von A nach B führt, sondern je nach Gegebenheiten der Umwelt gestaltet ist. Er sieht verfügbare, gespeicherte Informationen nicht nur als Teil des Organismus, sondern auch als Teil der Umgebung, an die sich der Organismus anpasst. Umwelt und Lebewesen werden als komplementär angesehen, da die Umwelt ein gewisses Angebot bereithält bzw. Zugänge gewährt, mit denen der Organismus interagiert. Aus dieser Sicht spielen mentale Repräsentationen und damit verbundene „Rechenleistungen" des Gehirns eine untergeordnete Rolle, während die Bedeutung von (durch die Umwelt beeinflusste) Wahrnehmung und Handlung in einem Rückkoppelungsprozess hervorgehoben wird.

Folgendes Beispiel sollte dabei helfen, diesen Ansatz besser zu verstehen: Thelen, Schöner, Scheier und Smith (2001) erklären das Verhalten von Säuglingen bei

Studien zum sogenannten A-nicht-B-Fehler durch die Rückkopplung von Handlung und Wahrnehmung. Bei diesem sehr bekannten Experiment sitzt ein Kind auf dem Schoß eines Elternteils vor einem Tisch, auf dem zwei identische Becher stehen. Unter einem der Becher (Becher A) wird ein für das Kind attraktiver Gegenstand versteckt. Der Tisch wird dann in Reichweite des Kindes gebracht, damit es den Becher anheben und den Gegenstand darunter erreichen kann. Dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt. Anschließend wird der Gegenstand unter Becher B versteckt. Das Greifverhalten des Kindes ist perseverativ. Es greift entgegen der Erwartung immer noch nach Becher A, es begeht den A-nicht-B-Fehler. Herkömmlich wird dieser Fehler durch die noch nicht vorhandene Fähigkeit der Objektpermanenz erklärt (Piaget, 1954), Thelen et al. (2001) sehen diesen Fehler jedoch als Produkt des dynamischen Prozesses, der durch das Zusammenspiel von Wahrnehmung, Bewegung, Erinnerung und Gegebenheiten entsteht. Interessanterweise greift das Kind nämlich zwar nach Becher A, fixiert dabei aber visuell Becher B, scheint das Objekt also eher dort zu erwarten. Zudem ist das Auftreten des Fehlers von verschiedenen Faktoren abhängig, wie z. B. dem körperlichen Aufwand, der gebraucht wird, um den Becher zu erreichen, der Unterscheidbarkeit der Becher, der Anzahl der Erreich-Versuche von Becher A bevor der Gegenstand unter Becher B versteckt wird und der Zeit, die zwischen dem Verstecken des Objektes unter Becher B und dem Greifen danach verstreicht. All diese Faktoren dürften keinen Einfluss haben, wenn fehlende Objektpermanenz der Grund für den A-nicht-B-Fehler wäre. Smith und Thelen (2003) gehen davon aus, dass nicht eine ausführende bzw. steuernde Zentrale für den Fehler verantwortlich ist, sondern dass dieser einfach durch das Zusammenspiel aller beteiligten Komponenten und den Zwängen und Möglichkeiten der Umwelt entsteht.

Die „extended" Perspektive:

Diese Sichtweise geht noch einen Schritt weiter. Kognition wird als über die Grenzen des Gehirns hinaus erweitert (*extended cognition*) angesehen, weil der Körper (oder in einem weiter gefassten Verständnis auch die Umwelt) nicht nur für die Informationsaufnahme zuständig ist. Er trägt auch maßgeblich dazu bei, dass kognitive Prozesse fehlerfrei, vollständig und gut funktionierend ablaufen, ist also Teil der Informationsverarbeitung (Shapiro, 2019). Dies kann beispielsweise dann der Fall sein, wenn das Gehirn entlastet wird, weil der Körper oder auch Bedingungen in der Welt genutzt werden, um Informationen zu strukturieren oder auszulagern (Clark, 2008). Ein in diesem Zusammenhang sehr aktuelles Thema umfasst Funktion und Einfluss von motorischen Gesten auf Denken und Lernen. Viele Forscher*innen, die sich mit motorischen Gesten auseinandersetzen, gehen mittlerweile davon aus, dass Gesten keine rein kommunikative Funktion haben, sondern Teil von Denkprozessen sind und einen bedeutenden Beitrag dazu leisten. Alibali und Nathan (2012) sehen Gesten als Manifestation von sensomotorischer, mentaler Simulation, die entweder direkt oder metaphorisch Aspekte ihrer Bedeutung abbilden. Gesten können (nonverbal) Auskunft darüber geben, was eine

Person bereits weiß, sie können als Hilfsmittel bei der Vermittlung von Inhalten eingesetzt werden, den Arbeitsspeicher entlasten und bilden einen zusätzlichen, motorischen und nonverbalen Kanal zur Informationsaufnahme (Goldin-Meadow, 2011). Der gezielte Einsatz von Gesten im Unterricht hat positive Auswirkungen auf das Lernen (Broaders, Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2007), dessen Nachhaltigkeit (Cook, Mitchell & Goldin-Meadow, 2008) und den Transfer des Gelernten (Novack, Congdon, Hemani-Lopez & Goldin-Meadow, 2014). Gesten haben nicht nur eine semiotische Funktion, sondern helfen auf indiviueller sowie sozialer Ebene bei der Konstruktion von Wissen. Salle und Krause (2020) sprechen in diesem Zusammenhang von einer kognitiven Funktion (aktivieren, manipulieren, strukturieren, explorieren) von Gesten und zeigen, dass diese beim mathematischen Lernen zur Gewinnung neuer Einsichten und zur Organisation von Denkprozessen beitragen können. Dies gilt nicht nur für fortgeschrittene Mathematik, sondern auch für den mathematischen Erstunterricht. Zeigegesten haben beispielsweise eine wichtige Funktion bei der Entwicklung der Zählfertigkeit (Gelman & Gallistel, 1978). Kindergartenkinder scheinen über motorische Gesten (Fingermengen) schon Zugang zu Mengen zu haben, bevor sie Zahlwörter kennen (Gunderson, Spaepen & Levine, 2015), was sich auch daran zeigt, dass sie bei der Zuordnung von Gesten zu Mengen (1, 2, 3, 4, 5 oder 10) erfolgreicher als bei der Zuordnung von Zahlwörtern zu Mengen sind (Gibson, Gunderson, Spaepen, Levine & Goldin-Meadow, 2018). Aber nicht nur der eigene Körper wird genutzt, um kognitive Abläufe zu verbessern, auch nicht-körperliche, externe Objekte, wie z. B. didaktische Arbeitsmittel, können den Arbeitsspeicher entlasten und als strukturierendes Tool dienen, das kognitive Abläufe unterstützt, komplementiert und Informationsverarbeitung vereinfacht (Dupont-Boime & Thevenot, 2017; Ross, Vallée-Tourangeau & Van Herwegen, 2019).

Überlegungen zu Wahl und Einsatz didaktischer Arbeitsmittel

Ein wichtiges Ziel im mathematischen Erstunterricht ist es, Arbeitsmittel zu nutzen, um einen kardinalen Zahlbgriff sowie ein numerisches Teile-Ganze-Wissen von Mengen aufzubauen und damit flexibles, nicht-zählendes Rechnen zu ermöglichen (Krauthausen, 2018; Schulz, 2014). Studien zeigen jedoch, dass Kinder dieses Ziel häufig nicht erreichen und am Ende des ersten Schuljahres und auch darüber hinaus zählend rechnen (Doschko, 2011; Carpenter & Moser, 1984; Henry & Brown, 2008) sowie Arbeitsmittel von sich aus häufig nur als Zählhilfe nutzen (DeChambrier, Thevenot & Barrouillet, 2018; Doschko, 2011). Dies kann mehrere Gründe haben. Zwei zentrale Einflussfaktoren sind die Wahl von passenden didaktischen Arbeitsmitteln und ein adäquater Einsatz dieser. Lehrpersonen scheinen oft unpassende Materialien zur Verfügung zu stellen und selbst zu wenig Bewusstsein darüber zu haben, welcher Einsatz bzw. welche Handlungen damit zielführend sind (Gaidoschik, 2010). Untersuchungen zeigen, dass Lehrpersonen Probleme damit haben, gezielte Interventionen zu setzen, die den Aufbau eines kardinalen Mengenverständnisses fördern und die Loslösung vom zählenden und materialgestützten Rechnen ermöglichen (Mutlu, Akgün & Akkusci, 2020; Schulz, 2014).

Die Bedeutung der nicht-zählenden Mengenerfassung

Eine Alternative zur zählenden Erfassung von Mengen, bei der ein ordinales Zahlverständnis dominant ist, bietet die nicht-zählende Mengenerfassung, die den Aufmerksamkeitsfokus auf die Menge als Einheit lenkt. Dabei können das Simultanerfassen (subitizing), die Mustererkennung (pattern recognition) und die strukturierte Anzahlerfassung (*conceptual subitizing* oder auch *groupitizing*) unterschieden werden (Clements, Sarama & MacDonald, 2019). Simultanerfassung ist ein vom Zählen zu unterscheidender Prozess (Pepper & Hunting, 1998) und bezeichnet das rasche, nicht-zählende Bestimmen von Mengen bis vier. Auch die sensomotorische Wahrnehmung scheint bei der Simultanerfassung eine Rolle zu spielen (Riggs, Ferrand, Lancelin, Fryziel, Dumur & Simpson, 2006; Plaisier & Smeets, 2011). Die räumliche Anordnung von Elementen als Muster ermöglicht die nicht-zählende Erfassung von Mengen, die über der Subitizingrange liegen (von Glasersfeld, 1992). Die Mustererkennung geht zwar nicht zwingend mit dem Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen Elementen bzw. Elementgruppen einher (Lüken, 2012), bietet aber einen Zugang zum Verständnis von einer Menge als Einheit (*composite unit*, Steffe & Cobb, 1988) und kann einen ersten Einblick in die Beziehung von Zahlen zueinander geben (z. B., dass sich das Würfelmuster von sechs aus zwei Dreierreihen zusammensetzt). Kinder sind schon im Kindergarten mit Würfelbildern und Fingermustern vertraut und nutzen diese, um Mengen nicht-zählend zu quantifizieren (Kreilinger, Roesch, Moeller & Pixner, 2020). Auch wenn die Vertrautheit mit Zehnerfeldmustern nicht vorausgesetzt werden kann, zeigt sich, dass diese – nach ausreichender Übung – erfolgreich bei der Mengenerfassung und darauf aufbauend beim Rechnen eingesetzt werden können (Chao, Stigler & Woodward, 2000; Obersteiner, Reiss, Ufer, Luwel & Verschaffel, 2014).

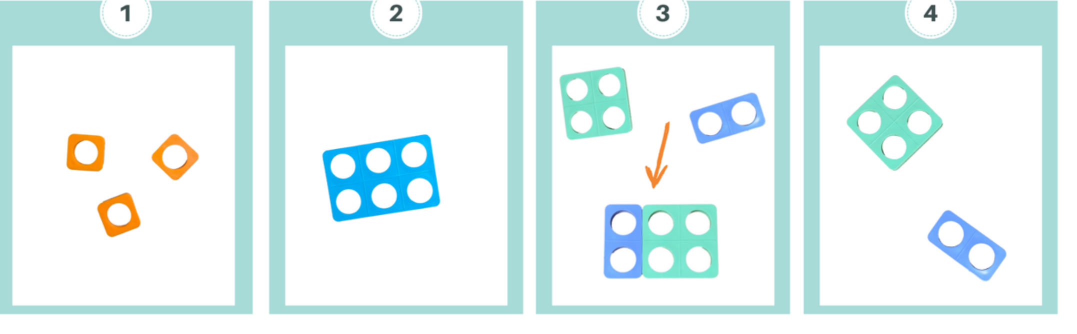

Abbildung 1: Möglichkeiten nicht-zählender Mengenerfassung am Beispiel von Numicon (flächige Anordnung) 1) Simultanerfassung, 2) Mustererkennung, 3) strukturierte Anzahlerfassung durch Umstrukturieren mit anschließender Mustererkennung, 4) strukturierte Anzahlerfassung durch Rechnen

Die strukturierte Anzahlerfassung ist komplexer als die Simultanerfassung oder die Mustererkennung, da das Kind schon über Vorwissen zu Mustern, einem Teile-

Ganze-Verständnis und einem Grundstock von einfachen Rechnungen verfügen muss. Dabei werden Teilmengen entweder so umstrukturiert, dass sich ein bekanntes Muster ergibt und die Gesamtmenge einfach „abgelesen" werden kann, oder Teilmengen werden wiederholt simultan erfasst bzw. als Muster erkannt und im Anschluss zusammengerechnet (vgl. Abbildung 1).

Da die Simultanerfassung auf Mengen bis vier beschränkt ist, ist es im Hinblick auf die nicht-zählende Mengenerfassung von Vorteil, fünf Elemente zu gruppieren. Der Bezugspunkt „fünf" und „zehn" bildet einen Anker bei der multimodalen, nicht-zählenden Mengenerfassung, der zudem die Entwicklung des Teile-Ganze-Verständnisses vorantreiben kann. So drängt sich durch die Fünfergliederung eine Erfassung von sechs als „fünf und eins" oder durch den Bezugsrahmen der Zehn neun als „eins weniger als zehn" auf und unterstützt so den Aufbau des relationalen Zahlbegriffes. Die Fünfer- und Zehnerstruktur wird jedoch nicht nur als Anker für die Bestimmung von Nachbarmengen genutzt, sondern führt zudem zu einer schnelleren und genaueren Mengenerfassung (Obersteiner et al., 2014).

Die Bedeutung der nicht-zählenden Materialhandlung

Geht man davon aus, dass das Verständnis von Zahlen nicht abstrakt, sondern in perzeptuellen und sensomotorischen Erfahrungen grundgelegt ist (Domahs, Moeller, Huber, Willmes & Nuerk, 2010; Fischer, 2018; Gashaj et al., 2019), sind multimodale und insbesondere motorische Erfahrungen mit Quantitäten bzw. Mengen am Material essentiell für den Aufbau von numerischem Wissen. Handlungen am Material sollten dabei genauso wie das Material selbst salient sein (Rau, 2020) bzw. passende *affordances* bieten, d. h. sie sollten so gestaltet sein, dass die für das Zielkonzept zentralen Informationen zugänglich sind. Eine hauptsächlich zählende Verwendung von didaktischen Arbeitsmitteln beim Darstellen von Mengen oder Lösen von einfachen Rechenaufgaben ist infrage zu stellen, da dabei zählende Strategien vertieft sowie verfestigt werden (Rottmann & Schipper, 2002; Schulz, 2014) und der Aufbau eines Teile-Ganze-Verständnisses von Mengen sogar behindert werden kann (Cheng, 2012). Insbesondere bei Untersuchungen zur Fingerverwendung wird deutlich, dass es einen klaren Unterschied zwischen zählendem und nicht-zählendem Materialeinsatz gibt. Durch die nicht-zählende Fingerverwendung, bei der mehrere Elemente gleichzeitig als Fingersets ausgestreckt werden, wird ein kardinales Mengenverständnis und der Aufbau von numerischem Teile-Ganze-Wissen durch gezielte Bewegungen und multimodale Wahrnehmungen initiiert (Björklund et al., 2018; Brissiaud, 1992; Soylu, Lester & Newman, 2018) (vgl. Video 1).

Video1: Simultanes Zeigen verschiedener Mengenbausteine bei der Addition am Beispiel der Finger

Ausgehend davon lässt sich eine Analogie zu Materialhandlungen mit anderen didaktischen Arbeitsmitteln ziehen. Eine Handlung, bei der das Kind mehrere einzelne Elemente gleichzeitig bewegt, fördert das kardinale Mengenverständnis. Werden mehrmals hintereinander Gruppen von Objekten als Einheit bewegt, erfährt das Kind, dass es aus kleineren Mengenbausteinen größere Mengen bauen kann, und erhält so Einsicht in die Teile-Ganze-Struktur von Mengen. Von Vorteil sind deshalb Materialien, die ein sehr flexibles Hinzufügen/Wegnehmen von unterschiedlich großen Mengenbausteinen erlauben. Die Erfahrungen, die dabei gemacht werden, können später abgerufen und beim Rechnen genutzt werden.

Kriterien zur Wahl didaktischer Arbeitsmittel

Die Wahl von Arbeitsmitteln erfolgt idealerweise immer im Hinblick auf den mathematischen Inhalt, der damit erarbeitet wird (Schulz, 2014). Die Wahl sollte wohl überlegt sein und sich an fachdidaktischen, lernpsychologischen und pädagogischen Erkenntnissen sowie wissenschaftlichen Evidenzen orientieren. Im Folgenden werden theorie- und evidenzbasierte mathematisch-inhaltliche Kriterien zur Wahl didaktischer Arbeitsmittel zum Aufbau eines kardinalen Zahlbegriffs und nicht-zählender Rechenkompetenz im Zahlenraum Zehn vorgestellt (Übersicht bei Konrad, 2021, vgl. Tabelle 1) und deren Zusammenhang mit der *embodied cognition* verdeutlicht.

Kriterien	näher bestimmende Aussagen	Bezug zur EC
1) Beschaffenheit	Das Material ist mit/ohne ablenkende Details gestaltet. Die Materialhandlung ist aufwändig/nicht aufwändig und damit ablenkend/nicht ablenkend.	embedded extended
2) Möglichkeiten zur Mengenerfassung	Das Zählen/Wahrnehmen einzelner Elemente einer Menge ist visuell möglich/nicht möglich. Die simultane Mengenerfassung ist möglich/nicht möglich. Mustererkennung ist möglich/nicht möglich. Es besteht ein/kein Bezug zu fünf und zehn. Das Material bietet Möglichkeiten/bietet eingeschränkt Möglichkeiten zur taktil-kinästhetischen Mengenerfassung (z.B. über Anzahl/Form/Länge).	embodied embedded extended
3) Möglichkeiten der Materialhandlung	Das Bewegen einzelner Elemente ist möglich/nicht möglich. Das simultane Legen/Hinzufügen von mehreren Elementen ist möglich/nicht möglich. Das simultane Wegnehmen von mehreren Elementen ist möglich/nicht möglich. Die motorischen Anforderungen beim Legen/Bewegen von Mengen sind bewältigbar/nicht bewältigbar.	embodied enacted embedded extended
4) Anordnung	Die Anordnung unterstützt/unterstützt nicht eine lineare Zahlenraumvorstellung.	embodied enacted embedded
5) Nutzung von Vorerfahrungen	Bestehende Vorerfahrungen zur Mustererkennung werden genutzt/nicht genutzt.	embodied embedded

Tabelle 1: Übersicht über die Kriterien zur Wahl didaktischer Arbeitsmittel (in Anlehnung an Konrad, 2021)

Didaktische Arbeitsmittel sollten merkmalsarm und reduziert gestaltet sein, damit sie als externe Repräsentanten (*extended cognition*) für alle möglichen Dinge (Blumen, Autos, Menschen, ...) stehen und als Brücke zwischen konkreter Sachsituation sowie mathematisch-symbolischer Darstellung fungieren können (Krauthausen, 2018; Carbonneau, Marley & Selig, 2013; Carbonneau & Marley, 2015). Aus der *embedded* Perspektive erscheinen didaktische Arbeitsmittel vor allem dann sinnvoll zu sein, wenn sie alle für das Zielkonzept notwendigen Informationen (*affordances*) verfügbar machen, durch ihre Gestaltung die Aufmerksamkeit der Lernenden auf relevante Informationen, in diesem Fall die Quantität, den kardinalen Zahlaspekt und das Teile-Ganze-Schema, lenken (reizinduzierte Aufmerksamkeitssteuerung, Stangl, 2021) und mit dem Zielkonzept übereinstimmende Handlungsmöglichkeiten bieten (Rau, 2020). Ablenkende Informationen bzw. sehr umständliche, zeitintensive Materialhandlungen, die für das zu erlernende Zielkonzept irrelevant sind und dennoch die Aufmerksamkeit der Lernenden binden, sind folglich kritisch zu bewerten. Wie oben beschrieben sind Anordnung und Struktur von Mengen relevant für die nicht-zählende Mengenerfassung. Didaktische Arbeitsmittel sollten demnach die Möglichkeit zur simultanen Mengenerfassung und zur Mustererkennung bieten, wobei der Bezug zu fünf und zehn Vorteile im Hinblick auf die Genauigkeit der Mengenerfassung und den Aufbau des relationalen Zahlbegriffs bietet. Die *affordances* des Materials (im Hinblick auf taktile und visuelle Mengenerfassung sowie Materialhandlung) sind ausschlaggebend dafür, was in der Auseinandersetzung damit gelernt werden kann (*embedded*) (Manches & O'Malley, 2016; Pouw, van Gog & Paas, 2014). Visuelle Wahrnehmung bietet neben taktil-kinästhetischer Wahrnehmung und Materialhandlungen einen körperlichen Zugang zu Mengen (*embodied*) und ist konstituierend für darauf aufbauende Zahlkonzepte. Außerdem ist ein didaktisches Arbeitsmittel ein externes Tool, das zu einer Entlastung, Verbesserung und Vervollständigung kognitiver Abläufe beitragen kann (Clark, 2008). Über Handlungen mit Material können zudem Lernprozesse initiiert und relevante Konzepte grundgelegt werden (*enactive*) (Pouw et al., 2014). Mit Materialhandlungen verbundene Gesten und die damit einhergehende kognitive Aktivierung scheint ebenfalls eine Rolle beim Lernen mit Materialien zu spielen (Salle & Krause, 2020). Didaktische Arbeitsmittel können entweder flächig oder linear angeordnet werden. Eine lineare Anordnung scheint im Hinblick auf die Entwicklung der *mental number line* (Dehaene, 1992) von Vorteil zu sein, da Zahlen schon vor Schuleintritt räumlich, linear repräsentiert sind. Diese Form der Repräsentation differenziert sich im Laufe der Grundschule weiter aus und trägt dazu bei, dass Kinder in höheren Schulklassen bessere Rechenleistungen erbringen (Lorenz, 2017). Lakoff und Nunez (2000) zeigen auf, dass sich das Verständnis von Arithmetik auf Basis körperlicher Erfahrungen vom Verständnis einer Sammlung von einzelnen Objekten hin zum Verständnis von Mengen als Länge und damit verbunden hin zu einem Bewegen auf einem Pfad bzw. einer Linie entwickelt. Die lineare Zahlvorstellung bildet auch die Basis für das Verständnis weiterer relvanter mathematischer Konzepte (z. B. negative Zahlen, Brüche) (Lakoff & Nunez, 2000). Die lineare Anordnung einzelner Objekte bzw. von Objektgruppen im Zuge des mathematischen Erstunterrichts erscheint deshalb sinnvoll. Die Nutzung von bereits verfügbarem Vorwissen kann den Lernprozess verkürzen, den Lernaufwand verringern und ist deshalb naheliegend. Da Kinder schon zu Beginn des ersten Schuljahres Würfelmuster und Fingerbilder schneller und genauer erfassen als unstrukturierte Mengen (Kreilinger et al., 2020), ist es naheliegend, dass Arbeitsmittel, die an dieses (körperbasierte) Vorwissen anknüpfen, einen Vorteil gegenüber anderen Arbeitsmitteln mit neu zu erlernenden Strukturen haben, die Interaktion mit dem Material beeinflussen und damit für den Lernprozess relevant sind (*embedded*). Zu beachten ist jedoch, dass bekannte Würfelmuster nur den Zahlenraum bis sechs abdecken.

Ablösung von konkreten Handlungen mit didaktischen Arbeitsmitteln

Unabhängig von den Kriterien zur Wahl bzw. zum Einsatz didaktischer Arbeitsmittel bleibt immer noch die Frage offen, wie Kinder erworbenes Wissen bzw. erworbene Konzepte losgelöst von der konkreten Materialverwendung nutzen können. Wilson (2002) unterscheidet in diesem Zusammenhang *online* und *offline cognition*.

Während der Begriff *online cognition* die konkrete Ausführung einer Handlung bezeichnet, ist mit *offline cognition* das innere mentale Simulieren gemeint. Dabei wird nicht davon ausgegangen, dass die Erfahrungen symbolisch kodiert werden, sondern dass sie in der Modalität erhalten bleiben, in der sie erfahren wurden. Das innere mentale Simulieren ist demnach die Aktivierung von multimodalen Informationen, die in ihrer Gesamtheit ein inneres Nachvollziehen von konkret gemachten Erfahrungen ermöglichen. Durch eine schrittweise Verknüpfung konkreter Erfahrungen mit Lautsprache (z. B. Zahlwort) und Symbolik (z. B. Ziffer) wird die innerliche Simulation zunehmend verkürzt, reduziert und damit effizienter (Radigk, 1990). Basis und Bedeutungsträger jeder symbolischen Kodierung in Form von Sprache oder Schriftsprache gründen sich jedoch in den oben beschriebenen *embodied concepts*. Das Grundverständnis für Zahlen und Operationen ist demnach von einer sprachlichen oder symbolischen Kodierung unabhängig verfügbar und stark in körperlichen Erfahrungen verwurzelt (Barsalou, 2008). Ausgehend von diesen basalen Erfahrungen wird durch das Bilden von Analogien oder in Form von Metaphern auch ein Verständnis von abstrakten, mathematischen Konzepten möglich (Lakoff & Johnson, 1999; Johnson, 1987; Lakoff & Nunez, 2000).

Zur vorliegenden qualitativen Analyse

Im Anschluss an die Darstellung der theoretischen Grundlagen werden nun gängige didaktische Arbeitsmittel vorgestellt und deren Brauchbarkeit im Hinblick auf die Entwicklung des kardinalen Zahlverständnisses und des darauf aufbauenden Teile-Ganze-Wissens reflektiert. Im Zuge einer qualitativen, kriteriengeleiteten Analyse sollte eine Antwort auf folgende, leitende Frage gegeben werden: Welche Möglichkeiten bzw. Grenzen bieten ausgewählte didaktische Arbeitsmittel in Bezug auf mathematisch-inhaltliche Kriterien, wie Beschaffenheit, Möglichkeiten zur Mengenerfassung bzw. Materialhandlung, Anordnung und Nutzung von Vorwissen?

Stichprobe

Im Zuge einer umfassenden Recherche (Google, Lehrmittelverlage, Schulbücher) wurden 26 physische, didaktische Arbeitsmittel identifiziert, die zum Aufbau von numerischem und arithmetischem Wissen eingesetzt werden (vgl. Anhang 1). Diese Arbeitsmittel können in fünf Gruppen eingeteilt werden. Unstrukturiert sind alle Materialien, die ohne bestimmte Struktur beliebig angeordnet werden. Gängige Beispiele dafür sind Muggelsteine, Plättchen, Naturmaterialien, Steckwürfel oder (meistens) auch Objekte in Schüttelboxen. Unstrukturierte Materialien werden zu strukturierten Arbeitsmitteln mit flexiblen Einheiten (vgl. Abbildung 2), wenn sie in einer bestimmten Struktur angeordnet werden (z. B. Plättchen, die in ein Zehnerfeld gelegt werden).

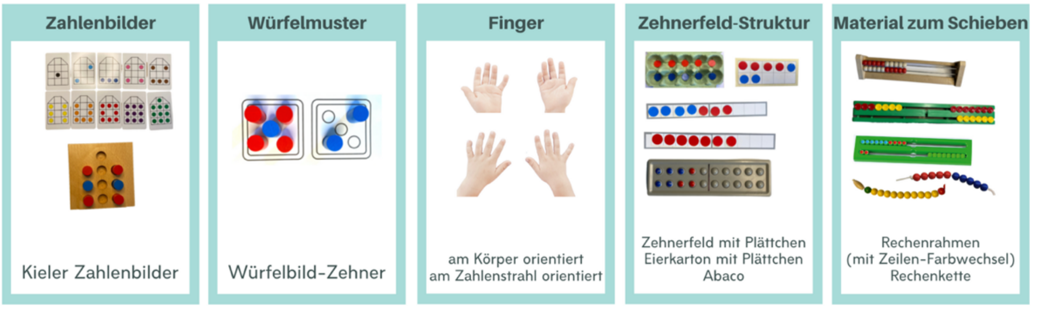

Abbildung 2: Übersicht über strukturierte Arbeitsmittel mit flexiblen Einheiten

All jene Materialien, die eine fix vorgegebene Struktur haben, bei denen die einzelnen Elemente aber nicht flexibel verwendet werden können, werden unter strukturierte Arbeitsmittel mit unflexiblen Einheiten (vgl. Abbildung 3) zusammengefasst (z. B. Cuisenaire-Stäbe, Rechenstäbe, bunte Perlenstäbe) (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010).

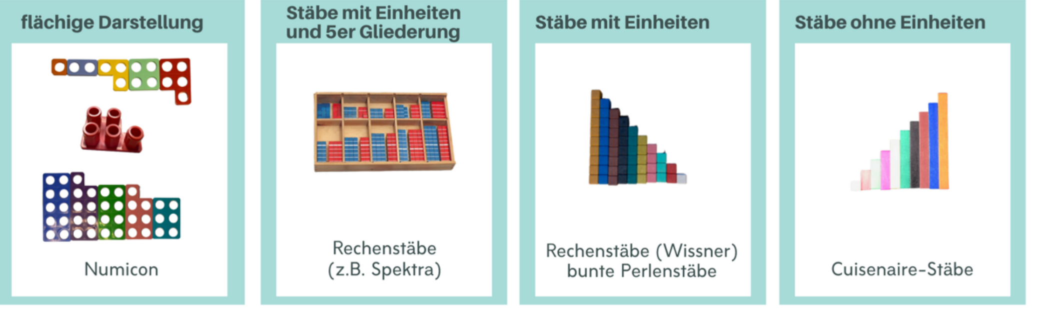

Abbildung 3: Übersicht über strukturierte Arbeitsmittel mit unflexiblen Einheiten

Außerdem gibt es ein paar Materialien, die durch ihre Beschaffenheit insbesondere für die Erarbeitung des Stellenwertsystems geeignet sind. Hier gibt es unterschiedliche Einheiten (Einer, Zehner und Hunderter), wobei es meist keine vorgegebene Struktur gibt, in der diese Einheiten angeordnet werden (z. B. Dienes Mehrsystemblöcke oder Stäbe und Stäbebündel). Die fünfte Kategorie enthält Arbeitsmittel mit symbolischer Kodierung. Dazu zählen zum Beispiel das Hunderterfeld, der Zahlenstrahl, Sumblox oder auch das Rechengeld. Da didaktische Arbeitsmittel in der vorliegenden Arbeit als Materialien definiert werden, die ohne Zahl- und Rechenzeichen auskommen, wird die Gruppe „Arbeitsmittel mit symbolischer Kodierung" aus der Stichprobe ausgeschlossen. Auch unstrukturierte Arbeitsmittel werden ausgeschlossen, da die fehlende Struktur die nicht-zählende Mengenerfassung von Mengen größer vier unmöglich macht (Clements et al., 2019). Da es hier vorwiegend um die Erarbeitung des kardinalen Zahlverständnisses und des numerischen Teile-Ganze-Wissens im Zahlenraum Zehn geht, werden auch Materialien, die insbesondere zur Erarbeitung des Stellenwertverständnisses konzipiert sind, aber im Zahlenraum Zehn keine Struktur enthalten, aus der Analyse ausgeschlossen. Die vierzehn verbleibenden didaktischen Arbeitsmittel wurden in einem weiteren Schritt nach Ähnlichkeiten zusammengefasst. So bilden zum Beispiel verschiedene Arten des Rechenrahmens und die Rechenkette die Kategorie „Material zum Schieben". Verschiedene Arbeitsmittel mit Zehnerfeld-Struktur (Zehnerfeld mit Plättchen, Eierkarton mit Plättchen, Abaco) bilden ebenfalls eine eigene Kategorie. In der Stichprobe verbleiben somit neun Arten didaktischer Arbeitsmittel, wobei fünf davon zu den strukturierten Arbeitsmitteln mit flexiblen Einheiten (vgl. Abbildung 2) und vier zu den strukturierten Arbeitsmitteln mit unflexiblen Einheiten (vgl. Abbildung 3) zu zählen sind. Überlegungen, die zu den ausgewählten, physischen Arbeitsmitteln angestellt werden, können zu einem großen Teil analog auf virtuelle Arbeitsmittel übertragen werden (Rau, 2020; Manches, O'Malley & Benford, 2010; Sarama & Clements, 2016). Virtuelle Arbeitsmittel werden jedoch nicht explizit in die Analyse einbezogen, da dies den Rahmen des vorliegenden Beitrages sprengen würde.

Methodisches Vorgehen

Für die Analyse der ausgewählten Arbeitsmittel wurden die fünf oben vorgestellten mathematisch-inhaltlichen Kriterien (vgl. Tabelle 1) herangezogen. Jedes Arbeitsmittel wurde zur Hand genommen, um damit folgende, konkrete Arbeitsaufträge auszuführen: 1) Zählen, 2) Mengen-Erfassung (Wie viele sind es?) 3) Mengen-Legen (Lege die Menge ...) und 4) Rechnen (einfache Additionen/Subtraktionen im Zahlenraum 10). Für jede der neun oben genannten Kategorien von Arbeitsmitteln wurde je ein Dokument angelegt, in dem Überlegungen zu den fünf Kriterien festgehalten wurden und in dem außerdem die Vorgehensweise bei der Ausführung der Arbeitsaufträge genau dokumentiert wurde. Die einzelnen Dokumente wurden als Fälle in MaxQDA eingespeist und anschließend kodiert, um einen übersichtlichen Vergleich der Arbeitsmittel möglich zu machen. Der Kodierleitfaden wurde vorab deduktiv in Anlehnung an die oben genannten Kriterien angelegt und im Zuge des Kodierens mit weiteren Codes, die notwendig erschienen, ergänzt.

Ergebnisse

Wie aus der Übersicht zur Beschaffenheit (vgl. Tabelle 2) ersichtlich, sind die meisten strukturierten Arbeitsmittel reduziert und nicht ablenkend gestaltet. Als detailarm wurden Arbeitsmittel dann klassifiziert, wenn sie ohne auffällige Muster, Strukturen, Farben oder andere Details gestaltet sind. Farbe kann als qualitatives Merkmal die Aufmerksamkeit eines Kindes weg von der Quantität einer Menge lenken und wird deshalb als ablenkend eingestuft. Insbesondere bei den Stäben mit und ohne Einheitenmarkierung ist die farbliche Kodierung dominant, weil eine Simultan- bzw. Quasi-Simultanerfassung aufgrund des fehlenden Bezugsrahmens zu fünf bzw. zehn schlecht möglich ist. Dies kann dazu führen, dass Kinder vordergründig die farbliche Qualität des Materials für die Differenzierung von Mengen heranziehen und nicht deren Quantität (Lorenz, 1992).

	Material	detailarm	ablenkend	nicht aufwändig	aufwändig
flexibel	Zahlenbilder	✓			✓
	Würfelmuster	✓			✓
	Finger	✓		✓	
	Zehnerfeld-Struktur	✓			✓
	Zum Schieben	✓		✓	
unflexibel	Flächige Darstellung	✓		✓	
	Rechenstäbe m. E. u. 5er	✓		✓	
	Rechenstäbe m. E.		✓	✓	
	Rechenstäbe o. E.		✓	✓	

Tabelle 2: Beschaffenheit der Arbeitsmittel und Aufwand bei der Materialhandlung

Eine Materialhandlung wurde dann als „nicht aufwändig" kodiert, wenn mehrere Elemente gleichzeitig ohne großen Zeitaufwand bewegt werden können. Dies trifft insbesondere auf die Arbeitsmittel Finger (wenn sie nicht zählend, sondern als Sets verwendet werden), auf Materialien zum Schieben und auf strukturierte Arbeitsmittel mit unflexiblen Einheiten zu (sofern nicht wiederholt mit Einerwürfeln bzw. Einerperlen hantiert wird). Insbesondere die Handhabung von Zahlenbildern, Würfelmustern und Zehnerfeld-Strukturen wurde als aufwändig eingestuft. Werden Mengen gelegt, hinzugefügt oder weggenommen, muss hier vorwiegend mit einzelnen Elementen gearbeitet werden, was motorisch und zeitlich aufwändig ist. Zudem müssen die Einzelelemente immer genau in die vorgegebene Struktur gelegt werden, damit eine quasi-simultane Mengenerfassung möglich ist. Kinder verwenden Arbeitsmittel vor allem dann, wenn sie ihnen hilfreich sowie brauchbar erscheinen und leicht zu „bedienen" sind. Die Finger haben hier als leicht zugängliches, vertrautes und intuitiv nutzbares Arbeitsmittel einen großen Vorteil gegenüber anderen, körperfernen Materialien, erfordern aber eine gut trainierte

Feinmotorik, um sie erfolgreich (gezieltes Ausstrecken von Fingersets) einsetzen zu können. Auch bei anderen strukturierten Arbeitsmitteln mit flexiblen Einheiten ist ein gewisses Maß an feinmotorischen Fertigkeiten gefordert, da das Hantieren mit Einzelelementen sonst Schwierigkeiten bereiten kann. Eine Ausnahme bilden hier Materialien zum Schieben, da die motorische Handlung (Hin- bzw. Herschieben) sehr einfach ist. Strukturierte Arbeitsmittel mit unflexiblen Einheiten haben den Vorteil, dass die Mengenrepräsentanten nicht so klein sind wie Einzelelemente und keine exakten Zuordnungen (z. B. Stecke den Zylinder genau in eine vorgegebene Vertiefung!) erfolgen müssen. Damit sind die Anforderungen an die feinmotorischen Fertigkeiten bei der Arbeit mit solchen Materialien geringer.

Für die rasche nicht-zählende Erfassung von Mengen ist ein gut wahrnehmbarer Bezug zu fünf bzw. zehn relevant. Die Anordnung von Mengen in gleichbleibenden, bekannten Mustern erleichtert es den Kindern zusätzlich, eine Menge visuell als Einheit zu identifizieren und das Ergebnis einer Rechnung „abzulesen". Durch das Bauen solcher Mengenmuster mit unterschiedlichen, kleineren Mengenbausteinen entwickeln Kinder nach und nach das für das flexible Rechnen notwendige numerische Teile-Ganze-Wissen, das später auch unabhängig von der Anordnung der Menge beim Rechnen genutzt werden kann. Welche Arbeitsmittel welche Möglichkeiten zur visuellen, nicht-zählenden Mengenerfassung bieten, wird in Tabelle 3 dargestellt. Strukturierte Arbeitsmittel mit flexiblen Einheiten haben fast alle einen klaren Bezug zu fünf und zehn, während dies für Arbeitsmittel mit unflexiblen Einheiten nicht zutrifft. Nur bei den Zahlenbildern ist der Bezug zu fünf nicht klar ersichtlich, während der Bezug zu zehn über das Zahlenhaus deutlich wahrnehmbar ist. Einen expliziten Bezug zu fünf weisen unter den Arbeitsmitteln mit unflexiblen Einheiten nur die Rechenstäbe mit Fünfermarkierung auf. Farbliche Markierungen werden bei fast allen Arbeitsmitteln eingesetzt. Nur die Finger sind komplett farblos gestaltet. Bei Materialien zum Schieben wird Farbe meist als Strukturierungsanker eingesetzt (z. B. fünf Perlen in einer Farbe). Sehr viele Materialien sind zudem zwei- oder dreifärbig (z. B. Wendeplättchen, Zahlenbilder) gestaltet, um das Abgrenzen von Teilmengen möglich zu machen (z. B. fünf Plättchen werden aufgelegt, drei davon sind blau, zwei davon sind rot).

		Bezug zu		farbige Kodierung				Mustererkennung			Simultanerfassung		taktil-kinästhetisch	
	Material	5	10	Struktur	Menge	Abgrenzung	keine	ja	eingeschränkt	nein	ja	nein	ja	eingeschränkt
flexibel	Zahlenbilder		✓		✓	✓		✓			✓			✓
	Würfelmuster	✓	✓			✓		✓			✓			✓
	Finger	✓	✓				✓	✓			✓		✓	
	Zehnerfeld-Struktur	✓	✓			✓		✓	✓		✓			✓
	Zum Schieben	✓	✓	✓		✓		✓	✓		✓			✓
unflexibel	Flächige Darstellung				✓			✓			✓			✓
	Rechenstäbe m. E. u. 5er	✓				✓		✓			✓			✓
	Rechenstäbe m. E.				✓					✓	✓			✓
	Rechenstäbe o. E.				✓					✓		✓		✓

Tabelle 3: Übersicht über Möglichkeiten zur Mengenerfassung

Dient die farbliche Kodierung des Materials als Anker für die Mengenerfassung (jede Menge hat genau eine Farbe), besteht die Gefahr, dass der Fokus der Aufmerksamkeit dadurch weg von der Wahrnehmung der Quantität rückt, und ist deshalb kritisch zu sehen. Die farbige Kodierung der Menge ist im Fall der Rechenstäbe ohne (zum Teil auch bei denen mit) Einheitenmarkierung als Ausweichstrategie bei der Mengenerfassung notwendig, da keine Simultanerfassung bzw. Quasi-Simultanerfassung unter Nutzung der Einheitenmarkierung, des Fünfer- bzw. Zehnerbezugs oder der Wiedererkennung von Mustern möglich ist. Bei allen anderen Materialien ist die fixe farbliche Kodierung im Grunde überflüssig (flächige Darstellung, Zahlenbilder), da die Quantität simultan oder quasisimultan (Mustererkennung, *groupitizing*) erfasst werden kann. Ein Arbeitsmittel wurde dann mit „Mustererkennung eingeschränkt möglich" kodiert, wenn die Möglichkeit besteht, den Zahlraum zehn unterschiedlich zu strukturieren. Wird der Zehner an einem Zehnerfeld einmal als Zeile dargestellt und ein anderes Mal als zwei Fünferreihen, die untereinander angeordnet sind, muss das Kind verschiedene Mengenmuster kennen, solange es noch nicht über verfügbares Teile-Ganze-Wissen zur strukturierten Anzahlerfassung verfügt (z. B. sieben als sieben in einer Reihe; sieben als fünf in einer Reihe und zwei in der Reihe darunter; sieben als drei in der oberen Reihe und vier in der unteren Reihe). Diese unterschiedlichen Möglichkeiten erlauben eine Variation der Darstellung von Mengen, die häufig positiv bewertet wird (Schulz, 2014). Es muss jedoch auch berücksichtigt werden, dass das Kind Vorwissen braucht, um mit unterschiedlichen Strukturen umgehen zu können. Jedes Arbeitsmittel ist nicht nur ein Werkzeug beim Lernen, sondern auch selbst Lernstoff (Krauthausen, 2018), insbesondere in Bezug auf damit verbundene Muster und Strukturen.

Beim Hantieren mit didaktischen Arbeitsmitteln haben Lernende nicht nur Zugang zu visuellen, sondern auch zu taktil-kinästhetischen Informationen. Untersuchungen zeigen, dass die taktil-kinästhetische Mengenerfassung (simultan/quasi-simultan) über sensorischen bzw. motorischen Input mit den Fingern erfolgt. Für die direkte taktil-kinästhetische Mengenerfassung sind also vor allem Wahrnehmungen mit den Fingern relevant (Hochman, Cohen, Ben-Shachar & Henik, 2020; Plaisier et al., 2011; Cohen, Aisenberg & Henik, 2018; Riggs et al., 2006). Da die Finger bei der Erfassung von Mengen mit anderen Materialien eine besondere Rolle spielen, wurde diese mit „Erfassung möglich“, alle anderen Arbeitsmittel, bei denen die taktil-kinästhetische Mengenerfassung ebenfalls mithilfe der Finger erfolgt, mit „Erfassung eingeschränkt möglich“ kodiert. Bei der Arbeit mit den Rechenstäben spielt für die taktil-kinästhetische Unterscheidung mit Mengen vor allem die Länge der Stäbe eine Rolle. Die Längenunterschiede sind jedoch marginal und ohne Vergleich der Stäbe schwer wahrzunehmen, weshalb auch hier mit „eingeschränkt möglich“ kodiert wurde.

Zählfertigkeit bildet ein wichtiges Fundament für die Entwicklung numerischer und arithmetischer Kompetenzen (Krajewski & Schneider, 2009). Da Zählhandlungen (z. B. Bewegen/Antippen von Elementen) die Aufmerksamkeit des Kindes an den Zählprozess binden, dabei helfen den Überblick beim Zählen zu behalten, den Arbeitsspeicher entlasten und die genaue Zuordnung von Objekt und Zahlwort erleichtern (Alibali & DiRusso, 1999; Gelman & Gallistel, 1978), erscheint es sinnvoll, Materialien auszuwählen, die Zählhandlungen erlauben und mit deren Hilfe eventuell fehlende Zählkompetenz nachentwickelt werden kann. Strukturierte Arbeitsmittel mit flexiblen Einheiten bieten die Möglichkeit, Einzelelemente beim Zählen zu bewegen und dabei die Struktur, die für die nicht-zählende Mengenerfassung von Vorteil ist, einzuhalten und so schon Vertrautheit damit aufzubauen. Bei strukturierten Arbeitsmitteln mit unflexiblen Einheiten ist dies nicht so einfach möglich, vor allem dann nicht, wenn die Einheiten auf den Mengenrepräsentanten gar nicht ersichtlich sind (z. B. Cuisenaire-Stäbe). Hier müssen Mengenrepräsentanten (z. B. Mengenstab) und Einzelelemente kombiniert werden. Es werden dann so lange Einzelelemente zu einem Stab gelegt, bis der Stab voll ist.

Die Zählhandlung ist damit immer eine Vergleichshandlung. Die Menge, die für das Kind wahrnehmbar ist, ist im Grunde immer doppelt so groß, wie die tatsächlich gezählte Menge. Bei flächigen Darstellungen (z. B. Numicon) ist dieses Verdoppeln der Menge weniger dominant wahrnehmbar, weil Einzelelemente beim Zählen auf die Mengenschablonen gesteckt bzw. gelegt werden. Mit „simultan hinzufügen möglich" wurden Arbeitsmittel dann kodiert, wenn das gleichzeitige Hinzufügen von mehr als zwei Elementen unter Einhaltung der Legestruktur gut möglich ist. Ist das nicht der Fall, wurde mit „simultan hinzufügen nicht möglich" kodiert.

	Material	simultanes Hinzufügen möglich	simultanes Hinzufügen nicht möglich	Hinzufügen nicht trennbarer Einheiten
flexibel	Zahlenbilder		✓	
	Würfelmuster		✓	
	Finger	✓		
	Zehnerfeld-Struktur		✓	✓
	Zum Schieben	✓	✓	
unflexibel	Flächige Darstellung		✓	✓
	Rechenstäbe m. E. u. 5er		✓	✓
	Rechenstäbe m. E.		✓	✓
	Rechenstäbe o. E.		✓	✓

Tabelle 4: Übersicht über Möglichkeiten der Materialhandlung beim Hinzufügen/Legen von Mengen

Vergleicht man strukturierte Arbeitsmittel mit flexiblen Einheiten in Hinblick auf diese Möglichkeit der Materialhandlung, zeigt sich, dass mehrere Elemente nur bei zwei Arten von Arbeitsmitteln, nämlich Fingern und Arbeitsmitteln zum Schieben, simultan hinzugefügt werden können. Das problemlose Verschieben von Mengen ist aber nur auf Rechenschiebern ohne Farb- und Zeilenwechsel möglich, da beim Farb- bzw. Zeilenwechsel jedes Element einzeln bewegt werden muss. Strukturierte Arbeitsmittel mit flexiblen Einheiten, wie das Zehnerfeld mit Plättchen, das Kieler

Zahlenhaus oder das Zehner-Würfel-Brett, haben den Nachteil, dass viel mit einzelnen Elementen gearbeitet werden muss. Sobald dabei die Menge größer als zwei ist, ist das gleichzeitige Legen in die Strukturvorlage nicht mehr oder nur sehr schwer möglich. Beim Zehnerfeld mit Plättchen gibt es eine Fünfer- und eine Zehnerstange, die das Legen von größeren Mengen vereinfachen und den Handlungsaufwand minimieren sollte. Dieses Hinzufügen von zusammenhängenden Mengen wurde mit „hinzufügen nicht trennbarer Einheiten" kodiert. Wie sich aus Tabelle 4 erschließt, trifft dies auf alle strukturierten Arbeitsmittel mit unflexiblen Einheiten zu. Mengen mit unflexiblen Einheiten lassen sich sehr einfach im Zuge einer Bewegung verschieben bzw. hinzufügen. Implizit erhält das Kind dadurch die Information, dass eine Menge eine Einheit bildet. Was dabei nicht motorisch oder taktil kinästhetisch und manchmal sogar nicht einmal visuell wahrgenommen werden kann, ist die Tatsache, dass jede Menge aus mehreren einzelnen Elementen besteht, eine Menge also eine Sammlung von Objekten ist. Beim simultanen Wegnehmen von Mengen verhält es sich ähnlich wie beim simultanen Hinzufügen. Der einzige Unterschied ist, dass das Wegnehmen mehrerer einzelner Elemente auch beim Zehnerfeld möglich ist, indem mehrere Elemente gleichzeitig einfach von der Vorlage geschoben werden. Auch ein Abdecken aller Elemente, die weggenommen werden sollten, wäre möglich, wobei ein Abdecken nicht unbedingt mit der Operation des Wegnehmens identisch ist. Auch bei strukturierten Arbeitsmitteln mit unflexiblen Einheiten kann eine gewisse Anzahl von Elementen abgedeckt werden. Bei den farbigen Rechenstäben ohne Einheitenmarkierung wird empfohlen, den Mengenstab, der für die Menge steht, die abgezogen werden sollte, zum Abdecken zu nutzen (Buda, 2017). Es sollte jedoch mitbedacht werden, dass die Operation, die ausgeführt wird, in diesem Fall eher ein Dazugeben und kein Wegnehmen ist.

	Material	Anordnung: linear	Anordnung: flächig	Vorwissen: Finger	Vorwissen: Würfel	Vorwissen: keines
flexibel	Zahlenbilder		✓			✓
flexibel	Würfelmuster		✓		✓	
flexibel	Finger	✓	✓	✓		
flexibel	Zehnerfeld-Struktur	✓	✓			✓
flexibel	Zum Schieben	✓	✓			✓
unflexibel	Flächige Darstellung		✓			✓
unflexibel	Rechenstäbe m. E. u. 5er	✓	✓			✓
unflexibel	Rechenstäbe m. E.	✓	✓			✓
unflexibel	Rechenstäbe o. E.	✓	✓			✓

Tabelle 5: Übersicht über die Anordnung (linear/flächig) und die Möglichkeit zur Anknüpfung an Vorwissen

Tabelle 5 zeigt einerseits eine Übersicht über alle Arten von Arbeitsmitteln und deren Möglichkeiten zur Anordnung und andererseits, inwiefern verwendete Muster an bereits bestehendes Vorwissen zu Mengenmustern anknüpfen. Ein Arbeitsmittel wurde immer dann als linear eingestuft, wenn der Zahlenraum von links nach rechts anwächst und jedes weitere Elemente rechts neben dem vorangehenden folgt. Viele Materialien erlauben eine flächige und eine lineare Darstellung von Mengen, die Entscheidung darüber liegt in den Händen der Lehrperson. Nur bei Zahlenbildern, Würfelbildern und flächigen Darstellungen ist eine lineare Anordnung des Zahlenraums Zehn gar nicht möglich. Bei den Fingern wurden beide Möglichkeiten kodiert, da die am Zahlenstrahl orientierte Fingerverwendung als eine lineare Anordnung und die am Körper orientierte Fingerverwendung als eine flächige Anordnung eingestuft wird. Besonders zwei Arten von Mengenmustern sind sehr vielen Kindern bei Schuleintritt schon bekannt: Würfelmuster und Fingerbilder. Würfelmuster knüpfen klar an Vorwissen zu Würfelmustern an, während die Finger natürlich das Vorwissen zu Fingerbildern aufgreifen. Alle anderen Arbeitsmittel haben keinen direkten Bezug zu Würfelmustern bzw. Fingerbildern, wobei zumindest die Gliederung in fünf und fünf, die sich bei den Fingern durch die Hände ergibt, bei der linearen Nutzung der Zehnerfeld-Struktur bzw. von Materialien zum Schieben wiedergefunden werden kann. Wird bei diesen Arbeitsmitteln der Zehner durch zwei untereinander angeordnete Fünferreihen flächig dargestellt, können auch die Würfelmuster vier und sechs bei der Mengenerfassung genutzt werden.

	Material	Beschaffenheit	Mengenerfassung	Handlung	Anordnung	Vorwissen	**Gesamtpunkte**
flexibel	Zahlenbilder	1	3	1	0	0	**5**
	Würfelmuster	1	5	1	0	1	**8**
	Finger	2	6	3	1	1	**13**
	Zehnerfeld-Struktur	1	5	2	1	0	**9**
	Zum Schieben	2	5	3	1	0	**11**
unflexibel	Flächige Darstellung	2	2	2	0	0	**6**
	Rechenstäbe m. E. u. 5er	2	4	1	1	0	**8**
	Rechenstäbe m. E.	1	1	1	1	0	**4**
	Rechenstäbe o. E.	1	0	1	1	0	**3**

Tabelle 6: Vergleich der neun Typen von Arbeitsmitteln in Bezug auf den Aufbau eines kardinalen Mengenverständnisses bzw. Teile-Ganzes-Wissens anhand von fünf mathematisch-inhaltlichen Kriterien. (Beschaffenheit: detailarm 1 P., nicht aufwändig 1 P.; Mengenerfassung: Bezug zu 5 1 P., Bezug zu 10 1 P., farbliche Kodierung Menge nein 1 P., Muster 1 P., simultan 1 P.; taktil-kinästhetische Mengenerfassung möglich 1 P.; Handlung: Zählhandlung möglich 1 P., simultan hinzufügen möglich 2 P., als Einheit hinzufügen möglich 1 P.; Anordnung: linear möglich 1 P.; Vorwissen: Anknüpfen möglich 1 P.)

Der Vergleich der Arbeitsmittel in Bezug auf die mathematisch-inhaltlichen Kriterien zeigt, dass verschiedene Arbeitsmittel beim Legen und Erfassen von Mengen unterschiedliche Stärken und Schwächen haben (vgl. Tabelle 6). Betrachtet man die Einschätzungen aus der Analyse, zeigt sich, dass insbesondere die Finger und Arbeitsmittel zum Schieben Vorteile in Bezug auf die Materialhandlung und Mengenerfassung haben. Im Gegensatz dazu zeigen farbige Rechenstäbe mit und ohne Einheitenmarkierung die größten Schwächen auf.

Diskussion

Im theoretischen Teil des vorliegenden Beitrags wurde dargelegt, inwiefern (mathematisches) Lernen ein körperlicher Prozess ist, der durch multimodale Erfahrungen mit und an didaktischen Arbeitsmitteln maßgeblich mitbestimmt wird. Eine daran anschließende Analyse von neun Arten von Arbeitsmitteln nach theorie- und evidenzbasierten mathematisch-inhaltlichen Kriterien sollte einen Überblick über deren Möglichkeiten und Grenzen beim Aufbau eines kardinalen Teile-Ganze-Verständnisses von Mengen geben und damit als Orientierung bei Wahl bzw. Einsatz didaktischer Arbeitsmittel dienen.

Aus Sicht der embodied cognition sind der eigene Körper und dessen Wahrnehmungs- bzw. Handlungsmöglichkeiten ausschlaggebend dafür, was wir lernen (*embodied*). Insbesondere Handlungen und damit verbundene motorische Informationen sind dabei für die Informationsaufnahme und -verarbeitung relevant, da sensomotorische Aktivitäten neue Wahrnehmungsmöglichkeiten eröffnen und selbst Ausgangspunkt für den Erwerb von Konzepten sein können (*enacted*). Didaktische Arbeitsmittel beeinflussen durch ihre Beschaffenheit (*affordances*) und damit verbundene Möglichkeiten zu Handlungen, Wahrnehmungen bzw. Interaktionen den Lernprozess (*embedded*). Zudem können sie als externes Tool den Arbeitsspeicher entlasten, dabei helfen, relevante Informationen zu strukturieren, diese konkret fassbar machen und damit kognitive Abläufe vereinfachen, ergänzen und unterstützen (*extended*).

Die Zusammenfassung der qualitativen Analyse (vgl. Tabelle 6) zeigt, dass „Finger“ und „Arbeitsmittel zum Schieben“ im Vergleich zu anderen Typen von didaktischen Arbeitsmitteln Vorteile bieten. Insbesondere die Finger haben als körpereigenes Arbeitsmittel aus Sicht der *embodied cognition* einen besonderen Stellenwert. Finger sind für Kinder schon lange vor Schuleintritt verfügar, werden intuitiv als Werkzeug zum Erwerb von numerischem Wissen eingesetzt (Rösch et al., 2016) und beeinflussen auf Basis sensomotorischer Erfahrungen die Entwicklung von numerischen und darauf aufbauend arithmetischen Kompetenzen von Kindern und Erwachsenen (Moeller & Nuerk, 2012). Als natürlich sturkturiertes (Fünfer- bzw. Zehnergliederung), leicht bedienbares und ohne viel Aufwand verfügbares Arbeitsmittel ohne ablenkende Details bieten sie (auch durch Nutzung von bestehendem Vorwissen) ideale Möglichkeiten zur multimodalen, nicht-zählenden Mengenerfassung (Simultanerfassung/Mustererkennung). Zudem eröffnen nicht-zählende Materialhandlungen (*montring* vgl. Soylu et al., 2018) einen Zugang zum kardinalen Teile-Ganze-Verständnis und unterstützen damit den Aufbau arithmetischer Kompetenzen (Björklund et al., 2018; Kullberg & Björklund, 2019). Durch eine am Zahlenstrahl orientierte Fingerverwendung von links nach rechts kann der Aufbau einer linearen Zahlraumvorstellung gefördert und unterstützt werden. „Materialien zum Schieben“ sind zwar kein körpereigenes Material, bieten aber im Hinblick auf Mengenerfassung und Materialhandlung ähnliche Möglichkeiten wie Finger. Auch hier ist das Bewegen von Mengen als Sets flexibel und mit sehr geringem Aufwand möglich. Als „künstliches“ Arbeitsmittel (vgl. Bartolini & Martignone, 2020) müssen Arbeitsmittel zum Schieben jedoch erst als Lernmaterial eingeführt werden und knüpfen nicht an vorhandenes Vorwissen an.

Ein in der Praxis sehr häufig verwendetes Arbeitsmittel ist das Zehnerfeld mit Plättchen. Die größte Schwäche dieses Arbeitsmittels ist die ablenkende und zeitaufwändige Materialhandlung, bei der ein gleichzeitiges Bewegen von mehreren Elementen nur eingeschränkt möglich ist. Die Entwicklung eines kardinalen Teile-Ganze-Verständnisses kann damit begrenzt mit sinnvollen, sensomotorischen Informationen unterstützt werden und basiert so großteils auf visuellem Input. Eine vorwiegend zählende Materialhandlung, bei der einzelne Elemente und nicht Mengen im Fokus der Aufmerksamkeit stehen (die Handlung also nicht mit dem Zielkonzept übereinstimmt), kann jedoch auch die visuelle, nicht-zählende Mengenerfassung erschweren. Dass das Zehnerfeld in der fachdidaktischen Diskussion aufgrund seiner hohen Flexibilität bei der Visualisierung individueller Rechenwege dennoch als brauchbar eingestuft wird (Schulz, 2014), ist deshalb zu hinterfragen. Denn in diesem Fall wird wieder klar, wie wichtig es ist, das Lernziel bei der Wahl von Arbeitsmitteln zu berücksichtigen. Verfügt ein Kind schon über einen stabilen kardinalen Zahlbegriff und zu einem Teil über numerisches Teile-Ganzes-Wissen, können Arbeitsmittel mit Zehnerfeldstruktur durchaus eine brauchbare Möglichkeit zur Erarbeitung verschiedener Rechenstrategien darstellen. Das Kind kann dann bei der Quasi-Simultanerfassung auf bereits verfügbares konzeptuelles Zahlwissen zurückgreifen und ist nicht mehr auf Zählstrategien angewiesen. Verfügt das Kind über dieses Vorwissen nicht, ist es sehr wahrscheinlich, dass die durch die Materialhandlung ausgelöste Aufmerksamkeitsfokussierung auf einzelne Objekte die Wahrnehmung der Menge als Einheit erschwert und das Kind bei vertrauten Zählstrategien verbleibt. In jedem Fall erscheint es notwendig sicherzustellen, dass das Kind über das entsprechende Vorwissen verfügt, das für den Umgang mit dem jeweiligen Arbeitsmittel notwendig ist. Fraglich bleibt, ob es sinnvoll ist, sich nach der Erarbeitung des kardinalen Teile-Ganze-Wissens mit einem geeigneten Material (z. B. Finger oder Arbeitsmittel zum Schieben) von diesem für die Erarbeitung verschiedener Rechenstrategien abzuwenden, insbesondere dann, wenn diese auch gute Möglichkeiten dazu bieten (Konrad & Lindtner, 2017; Radatz, Schipper, Ebeling & Dröge, 1996).

Farbige Stäbe mit oder ohne Einheitenmarkierung haben in Bezug auf einige Kriterien Schwächen aufgezeigt. Insbesondere die visuelle Mengenerfassung, die hier an eine fixe farbliche Kodierung bzw. an die Einschätzung von Längen als Quantitäten gebunden ist, erscheint wenig sinnvoll. Lorenz (1992) beschreibt in einem Fallbeispiel, dass ein Mädchen, das sich mit färbigen Rechenstäben ohne Markierung der einzelnen Elemente auseinandersetzte, die Länge des Stabes nicht mit dessen Quantität verband. Sie benutzte das Farbmerkmal der Menge als dominantes Identifikationsmerkmal und schaffte den Übergang zum numerischen Wert der Menge nicht. In diesem Zusammenhang ist die fixe farbliche Kodierung von Mengen kritisch zu sehen, da die Qualität „Farbe“ die Aufmerksamkeit des Kindes bindet und nicht zu einem quantitativen Verständnis von Mengen beiträgt. In Abgrenzung dazu ist Farbe als Hilfe bei der visuellen Strukturierung von Mengen (z. B. immer fünf Perlen in einer Farbe) oder zur Abgrenzung von zwei Summanden bzw. Kennzeichnung von Zerlegungen durchaus geeignet. Auch farbige Stäbe mit Einheitenmarkierung sind laut Analyse ein begrenzt brauchbares didaktisches Arbeitsmittel. Hier können die Kinder zwar durch die Einkerbungen erkennen, dass sich ein Stab (also eine Menge) aus mehreren einzelnen Elementen zusammensetzt, die Quasi-Simultanerfassung ist durch die fehlende Fünfergliederung jedoch nicht möglich, zudem fehlt der Bezug zum Zehner. Hauptidentifikationsmerkmal bleibt auch hier die Farbe oder die Länge des Stabes. Probleme können dann entstehen, wenn das Kind die Länge (unabhängig von der Farbe) nicht als Quantifizierungsmerkmal erkennt. Statt bei der Materialhandlung „drei und vier ist sieben“ zu denken, könnte das Kind seine Gedanken auf das fokussieren, was es konkret wahrnimmt, nämlich: „Da ist ein Holzstab und hier ist noch ein Holzstab, jetzt habe ich zwei Holzstäbe“, oder in einem etwas besseren Fall: „Hier ist ein Holzstab, hier ist ein etwas längerer Holzstab, zusammen bilden sie einen noch längeren Holzstab“. Lakoff und Nunez (2000) weisen darauf hin, dass Kinder Mengen zu Beginn der numerischen und arithmetischen Entwicklung als Sammlung von Objekten wahrnehmen und erst nach und nach die Länge als Indikator für Quantität heranziehen. Für die Erarbeitung eines grundlegenden Verständnisses von „Mehr-Weniger“ mögen unterschiedlich lange Stäbe (lang ist mehr, weniger lang ist weniger) sinnvoll erscheinen, eine genaue Quantifizierung der Menge ist jedoch durch die geringen Längenunterschiede der Stäbe sehr schwierig und nur durch den direkten Vergleich möglich. Auch hier besteht das Risiko, dass die Kinder eher auf das sehr dominante Merkmal „Farbe“ zurückgreifen oder die einzelnen Elemente, die durch die Einkerbungen wahrnehmbar sind, abzählen. Möchte man Rechenstäbe als didaktisches Arbeitsmittel einsetzen, sollte deshalb unbedingt auf eine gut wahrnehmbare Fünfergliederung geachtet und eine fixe farbige Kodierung von Mengen vermieden werden. Durch den Einsatz zusätzlicher Tools können die Schwächen von Arbeitsmitteln kompensiert werden. So könnte man beispielsweise Rechenstäbe mit Einheitenmarkierung und Fünfergliederung mit einer Rechenleiste kombinieren, die einen Zehnerbezug ermöglicht und die Entwicklung einer linearen Zahlvorstellung begünstigt.

Flächige Darstellungen mit flexiblen oder unflexiblen Einheiten (wie Numicon, Würfelbilder oder Zahlenbilder) erscheinen insbesondere im Hinblick auf die Entwicklung einer linearen Zahlraumvorstellung wenig vorteilhaft. Würfelmuster haben jedoch zumindest den Vorteil, dass sie an bestehendes Vorwissen von Kindern anknüpfen und einen guten Fünfer- sowie Zehnerbezug aufweisen. Die Materialhandlung (Stecken von Zylindern in dafür vorgesehene Vertiefungen) ist ausschließlich zählend möglich (hinzufügen sowie wegnehmen) und unterstützt damit die Entwicklung eines kardinalen Zahlbegriffes nicht. Dies ist auch bei den

Zahlenbildern der Fall, bei denen zudem ein gut erkennbarer Bezug zur Fünf fehlt. Werden die Numicon-Formen ohne Steckzylinder verwendet, können Mengen ohne Probleme simultan hinzugefügt werden. Ein großer Nachteil dieses Materials ist die fixe farbige Kodierung von Mengen und der fehlende Fünfer- bzw. Zehnerbezug.

Abschließend kann festgehalten werden, dass eine theorie- und evidenzbasierte Analyse von Arbeitsmitteln mit Blick auf das Zielkonzept notwendig erscheint, um Arbeitsmittel sinnvoll im Unterricht einzusetzen. Ein Bewusstsein über Stärken und Schwächen didaktischer Arbeitsmittel hilft der Lehrperson, passende Materialien auszuwählen, diese – wenn notwendig – zu adaptieren und sinnvolle Instruktionen zu deren Handhabung zu geben. Da Kinder die einem Arbeitsmittel innewohnenden Strukturen nicht per se einfach selbst entdecken und nutzen, sind passende Handlungen und eine entsprechende Gestaltung (z. B. klarer Bezug zu fünf und zehn) notwendig, um eine Aufmerksamkeitsfokussierung auf die relevanten Aspekte zu erreichen (Lorenz, 1992). Zusätzlich ist es sinnvoll, durch gezielte Fragen und die Versprachlichung von Handlungen, Strukturen und Beziehungen multimodale Wahrnehmungen zu reflektieren (Lorenz, 1992; Radigk, 1990; Schulz, 2014). Der in der fachdidaktischen Literatur häufig erwähnte „konstruktive Akt“, den ein Kind individuell vollziehen muss, um Strukturen und Beziehungen in ein Arbeitsmittel „hineinzudenken“ (Krauthausen, 2018; Lorenz, 2000; Lüken, 2012; Schulz, 2014), kann durch zielführende sensomotorische Erfahrungen an einem passend gestalteten Arbeitsmittel unter Berücksichtigung von bestehendem Vorwissen und durch sprachliche Reflexion didaktisch forciert werden und verbleibt so nicht zur Gänze in der Verantwortung des Kindes.

Limitationen und Ausblick

Es wurde versucht, alle Schritte der vorliegenden qualitativen Analyse transparent darzustellen und die Zuordnungen bzw. Einschätzung im Hinblick auf das Material theoretisch nachvollziehbar zu begründen. Dennoch beruhen die Ausgangsdaten zu einem nicht unwesentlichen Teil auf konkreten, subjektiven Erfahrungen mit dem Material. Die Intersubjektivität der Daten würde durch ein Hinzuziehen mehrerer Personen in den Prozess der Datengenerierung bzw. Datenanalyse erhöht werden. Die vorliegende Analyse ist theoretischer Natur und beschränkte sich auf die Frage, ob und inwiefern die multimodale Auseinandersetzung mit Arbeitsmitteln zur Entwicklung eines kardinalen und numerischen Teile-Ganze-Verständnisses zu Mengen beitragen kann. Weiterführend wäre eine Analyse von Arbeitsmitteln im Hinblick auf andere Bereiche (z. B. didaktische Kriterien, vgl. Konrad, 2021) oder andere mathematische Zielsetzungen (z. B. Stellenwertsystem, Zahlenraumerweiterung, Erarbeitung verschiedener Rechenstrategien) sowie mit anderen Methoden (z. B. diesbezügliche Befragung bzw. Beobachtung von Lehrpersonen, Analyse von kindlichen Handlungen mit Arbeitsmitteln) interessant und wünschenswert.

Literatur

Abrahamson, D., Nathan, M. J., Williams-Pierce, C., Walkington, C., Ottmar, E. R., Soto, H. & Alibali, M. W. (2020). The Future of Embodied Design for Mathematics Teaching and Learning. *Frontiers in Education*, *5*(August), 1–29. https://doi.org/10.3389/feduc.2020.00147

Aebli, H. (2011). *Zwölf Grundformen des Lehrens*. 14. Auflage. Klett-Cotta. Stuttgart

Alibali, M. W. & DiRusso, A. A. (1999). The Function of Gesture in Learning to Count: More Than Keeping Track. *Cognitive Development, 14*(1), 37–56. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(99)80017-3

Alibali, M. W. & Nathan, M. J. (2012). Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence From Learners' and Teachers' Gestures. *Journal of the Learning Sciences, 21*(2), 247–286. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446

Badets, A. & Pesenti, M. (2010). Creating Number Semantics Through Finger Movement Perception. *Cognition, 115*(1), 46–53. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2009.11.007

Barsalou, L. W. (2008). Grounded Cognition. *Annual Review of Psychology, 59*(1), 617–645. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.59.103006.093639

Bartolini, M. G. & Martignone, F. (2020). Manipulatives in Mathematics Education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 487–493). 2. Auflage. Springer Nature Switzerland. Cham.

Berteletti, I. & Booth, J. R. (2016). Finger Representation and Finger-Based Strategies in the Acquisition of Number Meaning and Arithmetic. In *Development of Mathematical Cognition*. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-801871-2.00005-8

Björklund, C., Kullberg, A. & Kempe, U. R. (2018). Structuring versus Counting: Critical Ways of Using Fingers in Subtraction. *ZDM*. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0962-0

Brissiaud, R. (1992). A Tool für Number Construction Finger Symbol Sets. In J. Bideaud, C. Melijac & J.-P. Fischer (Hrsg.), *Pathways to Number. Children's Developing Numerical Abilities* (S. 41–65). Lawrence Erlbaum. Cham.

Broaders, S. C., Cook, S. W., Mitchell, Z. & Goldin-Meadow, S. (2007). Making Children Gesture Brings out Implicit Knowledge and Leads to Learning. *Journal of Experimental Psychology, 136*(4), 539–550. https://doi.org/10.1037/0096-3445.136.4.539

Buda, C. (2017). *Rechnen Lernen mit farbigen Stäben*. Band 1. Addition und Subtraktion bis 20. 3. Auflage. Felicitas Hübner Verlag. Lehrte.

Carbonneau, K. J. & Marley, S. C. (2015). Instructional Guidance and Realism of Manipulatives Influence Preschool Children's Mathematics Learning. *The Journal of Experimental Education*. https://doi.org/10.1080/00220973.2014.989306

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics with Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380–400. https://doi.org/10.1037/a0031084

Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1984). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One Through Three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(3), 179–202.

Chao, S.-J., Stigler, J. W. & Woodward, J. A. (2000). The Effects of Physical Materials on Kindergartners' Learning of Number Concepts. *Cognition and Instruction, 18*(3), 285–316. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1803_1

Cheng, Z.-J. (2012). Teaching Young Children Decomposition Strategies to Solve Addition Problems: An Experimental Study. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 29–47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.002

Clark, A. (2008). *Supersizing the Mind. Embodiment, Action, and Cognitive Extension*. Oxford University Press. New York.

Clements, D. H., Sarama, J. & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: The Neglected Quantifier. In A. Norton & M. W. Alibali (Hrsg.), *Constructing Number. Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education* (S. 13–46). Springer. Cham.

Cohen, Z. Z., Aisenberg, D. & Henik, A. (2018). The Effects of Training on Tactile Enumeration. *Psychological Research, 82*, 468–487. https://doi.org/10.1007/s00426-016-0835-5

Cook, S. W., Mitchell, Z. & Goldin-Meadow, S. (2008). Gesturing makes learning last. *Cognition, 106*(2), 1047–1058.

DeChambrier, A., Thevenot, C. & Barrouillet, P. (2018). Frequency of Finger Looking During Finger Counting is Related to Children's Working Memory Capacities. *Journal of Cognitive Psychology, 5911*, 1–8. https://doi.org/10.1080/20445911.2018.1502190

Dehaene, S. (1992). Varieties of Numerical Abilities. *Cognition, 44*, 1–42.

Domahs, F., Moeller, K., Huber, S., Willmes, K. & Nuerk, H. C. (2010). Embodied Numerosity: Implicit Hand-based Representations Influence Symbolic Number Processing Across Cultures. *Cognition, 116*(2), 251–266. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.05.007

Doschko, D. (2011). *Lösungshäufigkeiten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Erstklässlern beim Bearbeiten von Aufgaben im Zahlenraum bis Zwanzig*. Verlag Dr. Kovac.

Dupont-Boime, J. & Thevenot, C. (2017). High Working Memory Capacity Favours the Use of Finger Counting in Six-year-old Children. *Journal of Cognitive Psychology*, 1–8. https://doi.org/10.1080/20445911.2017.1396990

Engelkamp, J. (1997). *Das Erinnern eigener Handlungen*. Hogrefe Verlag. Göttingen.

Fingerhut, J., Hufendiek, R. & Wild, M. (Hrsg.) (2021). *Philosophie der Verkörperung*. 3. Auflage. Suhrkamp. Berlin.

Fischer, M. H. (2018). Why Numbers are Embodied Concepts. *Frontiers in Psychology*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.02347

Gaidoschik, M. (2010). Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Peter Lang.

Gaidoschik, M. (2012). Nicht die Finger zählen, sondern denkende Kinder! *Lernen und Lernstörungen, 1*(1), 59–60. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000008

Gashaj, V., Oberer, N., Mast, F. W. & Roebers, C. M. (2019). Individual Differences in Basic Numerical Skills: The Role of Executive Functions and Motor Skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 182*, 187–195. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.01.021

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). The Child's Understanding of Number. Harvard University Press. Cambridge.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000). Schwierigkeiten beim Erwerb arithmetischer Konzepte im Anfangsunterricht. http://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/index/index/docId/16

Gibson, D. J., Gunderson, E. A., Spaepen, E., Levine, S. C. & Goldin-Meadow, S. (2018). Number Gestures Predict Learning of Number Words. *Developmental Science, 22*(3), 1–14. https://doi.org/10.1111/desc.12791

Goldin-Meadow, S. (2011). Learning Through Gesture. Wiley Interdisciplinary Reviews: *Cognitive Science, 2*(6), 595–607. https://doi.org/10.1002/wcs.132

Graß, K. H. & Krammer, G. (2018). Direkte und indirekte Einflüsse der Raumvorstellung auf die Rechenleistungen am Ende der Grundschulzeit. *Journal für Mathematik-Didaktik, 39*(1), 43–67. https://doi.org/10.1007/s13138-018-0129-0

Gunderson, E. A., Spaepen, E. & Levine, S. C. (2015). Approximate Number Word Knowledge Before the Cardinal Principle. *Journal of Experimental Child Psychology, 130*, 35–55. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.09.008

Henry, V. J. & Brown, R. S. (2008). First-Grade Basic Facts: An Investigation Into Teaching and Learning of an Accelerated, High Demand Memorization Standard. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(2), 153–183.

Hochman, S., Cohen, Z. Z., Ben-Shachar, M. S. & Henik, A. (2020). Tactile Enumeration and Embodied Numerosity Among the Deaf. *Cognitive Science, 44*. https://doi.org/10.1111/cogs.12880

Hunting, R. P. (2003). Part-whole Number Knowledge in Preschool Children. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 217–235. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00021-X

Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind. The Bodily Basis of Meaning, Imagination, and Reason*. The University of Chicago Press. Chicago. https://doi.org/10.1109/FCS.2017.8088869

Konrad, C. (2021). Die Qual der Wahl. Theoretische Grundlagen zu Wahl und Einsatz didaktischer Arbeitsmittel im mathematischen Erstunterricht. *Mathematik im Unterricht, 12*, 87–109. https://doi.org/10.25598/miu/2021-12-9

Konrad, C. & Lindtner, A. (2017). *Leitfaden für den Mathematikunterricht 1*. Trauner. Linz.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early Development of Quantity to Number-word Linkage as a Precursor of Mathematical School Achievement and Mathematical Difficulties: Findings From a Four-year Longitudinal Study. *Learning and Instruction, 19*(6), 513–526. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.10.002

Krauthausen, G. (2018). Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule. In F. Padberg & A. Büchter (Hrsg.), *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II*. 4. Auflage. Springer Spektrum. Berlin. https://doi.org/10.1007/bf02656617

Kreilinger, I. L., Roesch, S., Moeller, K. & Pixner, S. (2020). Mastery of Structured Quantities Like Finger or Dice Patterns Predict Arithmetic Performance. *Cognitive Processing, 3*. https://doi.org/10.1007/s10339-020-00994-4

Kullberg, A. & Björklund, C. (2019). Preschoolers' Different Ways of Structuring Part-Part-Whole Relations with Finger Patterns When Solving an Arithmetic Task. *ZDM*. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01119-8

Lakoff, G. & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh. The Embodied Mind and its Challenge to Western Thought*. Basic Books. New York.

Lakoff, G. & Nunez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From*. Basic Books. New York.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*. Hogrefe. Göttingen.

Lorenz, J. H. (2000). Aus Fehlern wird man … Irrtümer in der Mathematikdidaktik des 20. Jahrhunderts. *Grundschule, 1*, 19–22.

Lorenz, J. H. (2017). Einige Anmerkungen zur Repräsentation von Wissen über Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38*(1), 125–139. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0112-6

Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und impirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Waxmann. Münster.

Manches, A., O'Malley, C. & Benford, S. (2010). The Role of Physical Representations in Solving Number Problems: A Comparison of Young Children's Use of Physical and Virtual Materials. *Computers and Education, 54*(3), 622–640. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2009.09.023

Manches, A. & O'Malley, C. (2016). The Effects of Physical Manipulatives on Children's Numerical Strategies. *Cognition and Instruction, 34*(1), 27–50. https://doi.org/10.1080/07370008.2015.1124882

Moeller, K. (2012). Fingerbasierte Repräsentationen als verkörperlichte Vorläuferfähigkeit mathematischer Kompetenzen: Ein Plädoyer für mehr Dialog zwischen Fachdidaktik und Neuropsychologie. *Lernen und Lernstörungen, 1*(1), 63–71. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000010

Moeller, K. & Nuerk, H.-C. (2012). Zählen und Rechnen mit den Fingern: Hilfe, Sackgasse oder bloßer Übergang auf dem Weg zu komplexen arithmetischen Kompetenzen? *Lernen und Lernstörungen, 1*(1), 33–53. http://dx.doi.org/10.1024/2235-0977/a000004

Mutlu, Y., Akgün, L. & Akkusci, Y. E. (2020). What Do Teachers Think About Finger-Counting? *International Journal of Curriculum and Instruction, 12*(1), 268–288. https://doi.org/10.1080/02607476.2016.1226556

Nathan, M. J. & Walkington, C. (2017). Grounded and embodied mathematical cognition: Promoting mathematical insight and proof using action and language. *Cognitive Research: Principles and Implications, 2*(9). https://doi.org/10.1186/s41235-016-0040-5

Novack, M. A., Congdon, E. L., Hemani-Lopez, N. & Goldin-Meadow, S. (2014). From Action to Abstraction: Using the Hands to Learn Math. *Psychological Science, 25*(4), 903–910. https://doi.org/10.1177/0956797613518351

Obersteiner, A., Reiss, K., Ufer, S., Luwel, K. & Verschaffel, L. (2014). Do First Graders Make Efficient Use of External Number Representations? The Case of the Twenty-Frame. *Cognition and Instruction, 32*(4), 353–373. https://doi.org/10.1080/07370008.2014.948681

Pechter, D. & Zwaan, R. A. (Hrsg.) (2005). *Grounding Cognition. The Role of Perception and Action in Memory, Language, and Thinking*. Cambridge University Press. Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499968.003

Pepper, K. L. & Hunting, R. P. (1998). Preschoolers' Counting and Sharing. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 164–183.

Piaget, J. (1954). *The Construction of Reality in the Child*. Basic Books. New York.

Plaisier, M. A. & Smeets, J. B. J. (2011). Haptic Subitizing Across the Fingers. *Attention, Perception, and Psychophysics, 73*, 1579–1585. https://doi.org/10.3758/s13414-011-0124-8

Pouw, W. T. J. L., van Gog, T. & Paas, F. (2014). An Embedded and Embodied Cognition Review of Instructional Manipulatives. *Educational Psychology Review, 26*(1), 51–72. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9255-5

Radigk, W. (1990). *Kognitive Entwicklung und zerebrale Dysfunktion*. 2. Auflage. Verlag modernes lernen. Dortmund.

Radatz, H., Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. 1. Schuljahr. Schroedel. Hannover.

Rau, M. A. (2020). Comparing Multiple Theories about Learning with Physical and Virtual Representations: Conflicting or Complementary Effects? *Educational Psychology Review, 32*(2), 297–325. https://doi.org/10.1007/s10648-020-09517-1

Riggs, K. J., Ferrand, L., Lancelin, D., Fryziel, L., Dumur, G. & Simpson, A. (2006). Subitizing in Tactile Perception. *Psychological Science*. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2006.01696.x

Rösch, S., Moeller, K., Ohl, F. W. & Scheich, H. (2016). Förderung früher numerischer Kompetenz im Kindergartenalter: Mit Hilfe der Finger? In A. Schmitt, A. Schwentesius & E. Sterdt (Hrsg.), *Berichte aus dem KFB*. KFB.

Ross, W., Vallée-Tourangeau, F. & Van Herwegen, J. (2019). Mental Arithmetic and Interactivity: the Effect of Manipulating External Number Representations on Older Children's Mental Arithmetic Success. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09978-z

Rottmann, T. & Schipper, W. (2002). Das Hunderter-Feld. Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? *Journal für Mathematik-Didaktik, 23*(1), 51–74. https://doi.org/10.1007/BF03338946

Salle, A. & Krause, C. (2020). Kognitive Funktionen von Gesten beim mathematischen Arbeiten. *Journal für Mathematik-Didaktik*. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00169-w

Sarama, J. & Clements, D. H. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is „Concrete“? In P. S. Moyer-Packenham (Hrsg.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*. Springer. Cham.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarschule*. Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel. Braunschweig.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften*. Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik Band 2. Springer Spektrum. Wiesbaden.

Shapiro, L. (2019). *Embodied Cognition*. 2. Auflage. Routledge. New York.

Simon, H. A. (1994). *Die Wissenschaften vom Künstlichen*. 2. Auflage. Springer. Wien.

Smith, L. B. & Thelen, E. (2003). Development as a Dynamic System. *Trends in Cognitive Sciences, 7*(8), 343–348. https://doi.org/10.1016/S1364-6613(03)00156-6

Soebbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemiologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlicher Strukturierungsfähigkeit mathematischer Anschauungsmittel*. Franzbecker. Hildesheim.

Soylu, F., Lester, F. K. & Newman, S. D. S. (2018). You Can Count on Your Fingers: The Role of Fingers in Early Mathematical Development. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 107–135. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.85

Stangl, W. (2021). *Salienz*. Onlinelexikon für Psychologie und Pädagogik. https://lexikon.stangl.eu/29331/salienz

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. Springer. New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3844-7

Tang, K. S., Jeppsson, F., Danielsson, K. & Bergh Nestlog, E. (2022). Affordances of physical objects as a material mode of representation: A Social Semiotics Perspective of Hands-on Meaning-making. *International Journal of Science Education*. https://doi.org/10.1080/09500693.2021.2021313

Thelen, E., Schöner, G., Scheier, C. & Smith, L. B. (2001). The Dynamics of Embodiment: A Field Theory of Infant Perseverative Reaching. *Behavioral and Brain Sciences, 24*, 1–86. https://doi.org/10.1017/S0140525X01003910

Trabant, J. (2016). Verkörperungsphilosophie und Semiotik. In K. Sachs-Hombach (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Intermediale, multimodale und interkulturelle Aspekte von Kommunikation und Ästhetik*. Halem. Köln.

Varela, F. J., Thompson, E. & Rosch, E. (1993). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience*. MIT Press. Cambridge.

Von Glasersfeld, E. (1992). *Wissen, Sprache und Wirklichkeit*. Vieweg. Wiesbaden.

Wilson, M. (2002). Six Views of Embodied Cognition. *Psychonomic bulletin & review, 9*(4), 625–636. http://view.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/12613670

Abbildungsverzeichnis:

Tabelle 5: Übersicht über die Anordnung (linear/flächig) und die Möglichkeit zur Anknüpfung an Vorwissen (eigene Abbildung)

Tabelle 6: Vergleich der neun Typen von Arbeitsmitteln in Bezug auf den Aufbau eines kardinalen Mengenverständnisses bzw. Teile-Ganzes-Wissens anhand von fünf mathematisch-inhaltlichen Kriterien (eigene Abbildung)

Video 1: Simultanes Zeigen verschiedener Mengenbausteine bei der Addition am Beispiel der Finger (eigenes Video)

Anhang 1: Übersicht über didaktische Arbeitsmittel (eigene Abbildung)

CHRISTINA KONRAD:

Dipl. Päd., Bakk. phil, MA; Professorin für Mathematikdidaktik Primarstufe an der Privaten Pädagogischen Hochschule der Diözese Linz

Anhang 1

Bezeichnung	us	sf	suf	FaS	msK
Naturmaterialien (Steine, Kastanien, Eicheln, ...)	x				
Alltagsgegenstände/Spielsachen (Autos, Figuren, ..)	x				
Einzelne Gegenstände (Plättchen, Steckwürfel, ...)	x				
Objekte in Schüttelboxen	x				
Zehnerfeld (Holz oder Papier)		x			
Eierkarton mit Plättchen		x			
Abaco		x			
Rechenrahmen (einzeilig verschiebbar)		x			
Rechenrahmen (zweizeilig verschiebbar)		x			
Rechenkette		x			
Finger		x			
Kieler Zahlenbilder		x			
Würfelbilder mit Stecker		x			
Cuisenaire Stäbe (o. E., o. 5er)			x		
Numicon			x		
Rechenstäbe (m. E., m. 5er)			x		
Rechenstäbe (m. E., o. 5er)			x		
Montessori Perlenmaterial bunt			x		
Abacus				x	
Montessori Rechenschieber (Stellenwert)				x	
Stäbebündel und Stäbe				x	
Dienes Material/Mehrsystemblöcke				x	
Goldenes Perlenmaterial Montessori				x	
Rechengeld					x
Sumblox					x
Zahlenstrahl					x
Hundertertafel					x

Anhang 1: Übersicht über didaktische Arbeitsmittel (us = unstrukturiert; sf = strukturiert mit flexiblen Einheiten, suf = strukturiert mit unflexiblen Einheiten; msK = mit symbolischer Kodierung; FaS = Fokus auf Stellenwert)